

УДК 514.7

ЭВОЛЮЦИЯ ПОСТОЯННОЙ ЯМАБЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТОКА ЛИСТА

Ф. Данешвар Пип, А. Разави

Аннотация. Пусть $g(t)$ — решение потока Листа на замкнутом многообразии. Получено поточечное управление объемом метрики $g(t)$. При одном существенном предположении выводится формула для эволюции постоянной Ямабе $\mathcal{Y}(g(t))$, когда метрика подвергается потоку Листа.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.609

Ключевые слова: поток Листа, постоянная Ямабе, принцип максимума.

1. Введение

В последнее время были подробно изучены многие геометрические потоки. В данной работе нас интересует поток Листа, введенный им в [1]. Это поток является обобщением потока Риччи. Более точно, пусть $(M, g(t))$ — семейство n -мерных римановых многообразий с римановыми метриками $g(t)$. Поток Листа — это следующая система:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)} + 4d\phi(t) \otimes d\phi(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) = \Delta_{g(t)} \phi(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\text{Ric}_{g(t)}$ — тензор Риччи относительно эволюционирующей метрики $g(t)$, $\phi(t) : (M, g(t)) \rightarrow \mathbb{R}$ — семейство гладких функций на M , а $\Delta_{g(t)} = g^{ij}(t)\nabla_i(t)\nabla_j(t)$ — оператор Лапласа — Бельтрами относительно метрики $g(t)$. Поскольку система (1.1) слабо параболична, можно применить метод де Тюрка [2] для доказательства существования и единственности в короткое время на замкнутых многообразиях. Лист доказал существование в длительное время для потока в случае, когда M — компактное многообразие (см. [3, теорема 5.15]). Исследование системы (1.1) мотивировано связью этого потока с общей теорией относительности. В действительности стационарные точки потока Листа можно интерпретировать как статические решения уравнений эйнштейновского вакуума (см. [1, 3]). Если взять отображение $\phi(t) : (M, g(t)) \rightarrow \mathbb{R}$ постоянным, то поток Листа превращается в знаменитый поток Риччи.

2. Поточечное управление объемом эволюционирующей метрики

В этом разделе сначала приведем некоторые необходимые леммы, в конце дадим поточечное управление объемом метрики $g(t)$, эволюционирующей под действием потока Листа. В статье используется обозначение

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = h_{ij},$$

где h — некоторый симметричный 2-тензор.

Лемма 2.1 (Лист [1]). Пусть $(g(t), \phi(t))$ — решение системы (1.1). Тогда скалярная кривизна эволюционирующей метрики $g(t)$ удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2 + 4|\Delta\phi|^2 - 4|\nabla^2\phi|^2 - 8\langle \text{Ric}, d\phi \otimes d\phi \rangle,$$

где R — скалярная кривизна метрики $g(t)$.

Лемма 2.2 (Лист [1]). Пусть $(g(t), \phi(t))$ — решение системы (1.1). Тогда символы Кристоффеля, ассоциированные с $g(t)$ в координатной карте, эволюционируют по закону

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t} = g^{kl} \left(-\nabla_i R_{jl} - \nabla_j R_{il} + \nabla_l R_{ij} + 4(\nabla_i \nabla_j \phi) \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \right).$$

Следующая лемма показывает, как элемент объема dV метрики $g(t)$ меняется при деформации метрики.

Лемма 2.3 (Лист [1]). Пусть $(g(t), \phi(t))$ — решение системы (1.1). Тогда выполняется следующее эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial dV}{\partial t} = (-R + 2|\nabla\phi|^2) dV.$$

Определим симметричный тензор $\mathcal{S} := \text{Ric}_{g(t)} - 2d\phi(t) \otimes d\phi(t)$ с компонентами

$$S_{ij} = R_{ij} - 2\nabla_i \phi \nabla_j \phi.$$

Пусть $S = \text{tr}_g \mathcal{S} = g^{ij} S_{ij} = R - 2|\nabla\phi|^2$ — след этого тензора. Можем переписать поток Листа в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2S_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) = \Delta_{g(t)} \phi(t). \quad (2.1)$$

В дальнейшем понадобится принцип максимума для параболических уравнений с частными производными с нелинейным членом реакции. На компактном многообразии принцип максимума утверждает, что, какие бы поточечные ограничения ни выполнялись для гладкого решения уравнения теплопроводности в начальный момент времени, они сохраняются и при $t > 0$. Следующий результат доказан в [4].

Теорема 2.4 [4, теорема 4.4]. Пусть $u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\partial}{\partial t} u \geq \Delta_{g(t)} u + \langle X(t), \nabla u \rangle_{g(t)} + F(u),$$

где $g(t)$ — гладкое однопараметрическое семейство метрик на M , $X(t)$ — гладкое однопараметрическое семейство векторных полей на M и $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — локально липшицева функция. Предположим, что функция $u(\cdot, 0)$ ограничена снизу константой $C_0 \in \mathbb{R}$ и $\psi(t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = F(\psi), \quad \psi(0) = C_0.$$

Тогда $u(x, t) \geq \psi(t)$ для всех $x \in M$ и всех $t \in [0, T)$, для которых $\psi(t)$ определено.

В следующей теореме покажем, что вдоль потока объем $V(t)$ метрики $g(t)$ ограничен сверху.

Теорема 2.5. Пусть $(g(t), \phi(t))$ — поток Листа на замкнутом многообразии M^n для $t \in [0, T)$. Если $S_{\min}(0) := \min_{x \in M} S(0) < 0$, то $\frac{V(t)}{(1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0))^{\frac{n}{2}}}$ убывает и, в частности,

$$V(t) \leq V(0) \left(1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0) \right)^{\frac{n}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.11 из [1] имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} S = \Delta S + 2|S_{ij}|^2 + 4|\Delta\phi|^2 \geq \Delta S + 2|S_{ij}|^2. \quad (2.2)$$

Производя ортогональное разложение

$$S_{ij} = S_{ij}^0 + \frac{S}{n} g_{ij}$$

тензора $\mathcal{S}$ через бесследный тензор $\mathcal{S}^0$, видим, что

$$|S_{ij}|^2 = |S_{ij}^0|^2 + \frac{S^2}{n^2} |g|^2 \geq \frac{S^2}{n}. \quad (2.3)$$

Из (2.3), (2.2), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} S \geq \Delta S + 2|S_{ij}|^2 \geq \Delta S + \frac{2}{n} S^2. \quad (2.4)$$

В силу (2.4) можно применить принцип максимума для $u \equiv S$, $X \equiv 0$, $F(r) = \frac{2}{n} r^2$ и

$$\psi(t) = \frac{S_{\min}(0)}{1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0)}.$$

Поскольку $u(\cdot, 0) \geq \psi(0)$, получаем

$$S \geq \frac{S_{\min}(0)}{1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0)} \quad (2.5)$$

для всех времен $t \in [0, T)$. Вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \left[\frac{V(t)}{(1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0))^{\frac{n}{2}}} \right] &= \frac{d}{dt} \left[\ln V - \frac{n}{2} \ln \left(1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0) \right) \right] \\ &= \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{S_{\min}(0)}{1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0)} = \frac{1}{V} \int_M \frac{\partial dV}{\partial t} + \frac{S_{\min}(0)}{1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0)} \\ &= -\frac{1}{V} \int_M S dV + \frac{S_{\min}(0)}{1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0)} \leq -\min_M S(t) + \frac{S_{\min}(0)}{1 - \frac{2t}{n} S_{\min}(0)} \leq 0. \end{aligned}$$

Здесь использована лемма 2.3 вместе с определением S . Для вывода последнего неравенства также использовано неравенство (2.5). $\square$

3. Эволюция постоянной Ямабе

В 2007 г. в [5] Чжан и Лю вывели формулу для производной постоянной Ямабе $\mathcal{Y}(g(t))$, где $g(t)$ — решение потока Риччи на замкнутом n -мерном многообразии. Следуя этим авторам, ниже получим формулу для производной

$\mathcal{Y}(g(t))$, когда $g(t)$ — решение потока Листа. В качестве приложения предполагаем, что g_0 — метрика постоянной скалярной кривизны на замкнутом многообразии M^n и $(g(t), \phi(t))$ — решение потока Листа, удовлетворяющее условию $g(0) = g_0$. Кроме того, если $\phi(0)$ — гармоническое отображение с условием $|\nabla \phi(0)|^2 = R_{g(0)}$, то будет показано, что

$$\left. \frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) \right|_{t=0} \geq 0.$$

Предположим, что M — замкнутое гладкое многообразие размерности $n \geq 3$. Напомним, что нормализованный функционал Гильберта — Эйнштейна $\mathcal{E}$ сопоставляет каждой римановой метрике g на M вещественное число следующим образом:

$$\mathcal{E}(g) = \frac{\int_M R_g dV_g}{\left(\int_M dV_g \right)^{(n-2)/n}},$$

где R_g и dV_g — скалярная кривизна и элемент объема метрики g соответственно. Ямабе выдвинул гипотезу, что всякий конформный класс метрик содержит метрику постоянной скалярной кривизны. В [6–10] доказано, что наименьшее значение $\mathcal{E}(g)$ достигается в каждом конформном классе метрик и к тому же это значение достигается метрикой постоянной скалярной кривизны. Обозначим такую метрику символом $\hat{g}$; она может быть построена минимизацией нормализованного функционала Эйнштейна — Гильберта $\mathcal{E}$ на всех метриках, конформных метрике g . Если $[g]$ — конформный класс римановой метрики g на M , то постоянная Ямабе $\mathcal{Y}(g)$ класса $[g]$ есть инфимум нормализованного функционала Эйнштейна — Гильберта на классе $[g]$:

$$\mathcal{Y}(g) = \inf_{\hat{g} \in [g]} \mathcal{E}(\hat{g}) = \inf_{\hat{g} \in [g]} \frac{\int_M R_{\hat{g}} dV_{\hat{g}}}{\left(\int_M dV_{\hat{g}} \right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Пусть u — положительная гладкая функция на M . Полагая $\hat{g} = u^{4/(n-2)}g$, получаем

$$\frac{\int_M R_{\hat{g}} dV_{\hat{g}}}{\left(\int_M dV_{\hat{g}} \right)^{(n-2)/n}} = \frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R_g u^2 \right) dV_g}{\left(\int_M u^{2n/(n-2)} dV_g \right)^{(n-2)/n}}.$$

Можно переписать постоянную Ямабе следующим образом:

$$\mathcal{Y}(g) = \inf_{u \in C^\infty(M), u > 0} \frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R_g u^2 \right) dV_g}{\left(\int_M u^{2n/(n-2)} dV_g \right)^{(n-2)/n}}. \quad (3.1)$$

Функция u , на которой $\mathcal{Y}(g)$ достигает своего инфимума, называется *минимизатором Ямабе*, а метрика $u^{4/(n-2)}g$ — *метрикой Ямабе*. На самом деле минимизатор Ямабе u можно получить из уравнения Эйлера — Лагранжа

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + R_g u = \mathcal{Y}(g) u^{(n+2)/(n-2)}, \quad (3.2)$$

$$\int_M u^{2n/(n-2)} dV_g = 1. \quad (3.3)$$

Заметим, что существование минимизатора u вытекает из решения проблемы Ямабе [8]. Определим некоторый инвариант гладкого замкнутого многообразия M , полагая

$$\sigma(M) = \sup_g \mathcal{Y}(g) = \sup_g \inf_{\hat{g} \in [g]} \mathcal{E}(\hat{g}),$$

где супремум берется по всем гладким метрикам на M .

Лемма 3.1. Пусть $\phi \in C^\infty(M)$ — гармоническая функция, т. е. $\Delta\phi = 0$. Тогда

$$\Delta|\nabla\phi|^2 = 2|\nabla^2\phi|^2 + 2\langle \text{Ric}, \nabla\phi \otimes \nabla\phi \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нормальных координатах имеем

$$\begin{aligned} \Delta|\nabla\phi|^2 &= \nabla_p \nabla_p (\nabla_i \phi \nabla_i \phi) = 2\nabla_p (\nabla_i \phi \nabla_p \nabla_i \phi) \\ &= 2(\nabla_p \nabla_i \phi)(\nabla_p \nabla_i \phi) + 2(\nabla_i \phi) \nabla_p \nabla_p \nabla_i \phi = 2(\nabla_p \nabla_i \phi)(\nabla_p \nabla_i \phi) \\ &+ 2(\nabla_i \phi)(\nabla_i \nabla_p \nabla_p \phi - R_{pikp} \nabla_k \phi) = 2|\nabla^2\phi|^2 + 2(\nabla_i \phi)(\nabla_i \Delta\phi) + 2\langle \text{Ric}, \nabla\phi \otimes \nabla\phi \rangle \\ &= 2|\nabla^2\phi|^2 + 2\langle \text{Ric}, \nabla\phi \otimes \nabla\phi \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Последняя строка следует из гармоничности ϕ . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Впредь для краткости полагаем $u = u(t)$, $R = R_{g(t)}$, $\nabla = \nabla_{g(t)}$, $\Delta = \Delta_{g(t)}$, $dV = dV_{g(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ и $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Предложение 3.3. Пусть $g(t)$ — поток Листа на замкнутом многообразии M^n для $t \in [0, T)$. Если существует C^1 -семейство гладких функций $u(t) > 0$, $t \in [0, T)$, удовлетворяющих соотношениям

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_{g(t)} u(t) + R_{g(t)} u(t) = \widetilde{\mathcal{Y}}(t) u(t)^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad (3.5)$$

$$\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} dV_{g(t)} = 1, \quad (3.6)$$

где $\widetilde{\mathcal{Y}}$ — функция только от t , то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) &= \int_M \left(\frac{8(n-1)}{n-2} S_{ij} \nabla_i u \nabla_j u + 2|\text{Ric}|^2 u^2 \right. \\ &- \frac{n-2}{n} u^2 \Delta R - \frac{4n^2 + 4n - 8}{n(n-2)} u^2 \Delta|\nabla\phi|^2 \Big) dV - \frac{2}{n} \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R u^2 \right) S dV \\ &+ \int_M (-4\Delta|\nabla\phi|^2 + 4|\Delta\phi|^2 + 4|\nabla^2\phi|^2) u^2 dV \\ &+ \int_M \frac{16(n-1)}{n-2} \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_i \nabla_j u^2 dV + \int_M \frac{32(n-1)}{n-2} u \Delta\phi \langle \nabla\phi, \nabla u \rangle dV, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $S_{ij} = R_{ij} - 2\nabla_i \phi \nabla_j \phi$ и S — ее след.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k := \frac{\partial u}{\partial t}$. Заметим, что

$$\widetilde{\mathcal{Y}}(t) = \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R u^2 \right) dV.$$

Для вычисления $\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{W}}(t)$ сначала возьмем производную $\frac{\partial}{\partial t}$ функции $|\nabla u|^2$. В координатах имеем

$$|\nabla u|^2 = g^{ij}\nabla_i u \nabla_j u.$$

С другой стороны, очевидно, $\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} = -h^{ij}$. Значит,

$$\frac{\partial |\nabla u|^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(g^{ij}\nabla_i u \nabla_j u) = -h^{ij}\nabla_i u \nabla_j u + 2g^{ij}\nabla_i \frac{\partial u}{\partial t} \nabla_j u.$$

Подставляя координатный вид (1.1) в последнее уравнение, получаем

$$\frac{\partial |\nabla u|^2}{\partial t} = (2R^{ij} - 4\nabla^i \phi \nabla^j \phi)(\nabla_i u \nabla_j u) + 2g^{ij}\nabla_i k \nabla_j u. \quad (3.8)$$

Поэтому, пользуясь (3.8) и леммами 2.1, 2.3, в нормальных координатах имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{W}}(t) &= \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} [(2R_{ij} - 4\nabla_i \phi \nabla_j \phi)(\nabla_i u \nabla_j u) + 2\nabla_i k \nabla_i u] \right) dV \\ &+ \int_M ((\Delta R + 2|\text{Ric}|^2 - 8R_{ij}\nabla_i \phi \nabla_j \phi + 4|\Delta \phi|^2 - 4|\nabla^2 \phi|^2)u^2 + 2Ruk) dV \\ &+ \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + Ru^2 \right) (-R + 2|\nabla \phi|^2) dV. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Теперь возьмем $\frac{d}{dt}$ от соотношения (3.5). Сначала получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)} u(t) &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{ij}\nabla_i \nabla_j u) = \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} \nabla_i \nabla_j u + g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} (\partial_i \partial_j u - \Gamma_{ij}^k \partial_k u) \\ &= \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} \nabla_i \nabla_j u + g^{ij} (\partial_i \partial_j \partial_t u - \partial_t \Gamma_{ij}^k \partial_k u - \Gamma_{ij}^k \partial_k \partial_t u) \\ &= \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} \nabla_i \nabla_j u + g^{ij} (\partial_i \partial_j \partial_t u - \Gamma_{ij}^k \partial_k \partial_t u) - g^{ij} \partial_t \Gamma_{ij}^k \partial_k u \\ &= \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} \nabla_i \nabla_j u + \Delta \partial_t u - 4\Delta \phi \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Последняя строка здесь следует из соотношения

$$\begin{aligned} g^{ij} \partial_t \Gamma_{ij}^k \partial_k u &= g^{kl} \left(-\frac{1}{2} \nabla_l R - \frac{1}{2} \nabla_l R + \nabla_l R + 4\Delta \phi \partial_l \phi \right) \partial_k u \\ &= 4g^{kl} \Delta \phi \partial_l \phi \partial_k u = 4\Delta \phi \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где использованы сокращенное тождество Бьянки и лемма 2.2. Согласно приведенному выше рассуждению в нормальных координатах производная (3.5) по t равна

$$\begin{aligned} & -\frac{4(n-1)}{n-2} ((2R_{ij} - 4\nabla_i \phi \nabla_j \phi) \nabla_i \nabla_j u + \Delta k - 4\Delta \phi \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle) \\ & + (\Delta R + 2|\text{Ric}|^2 - 8R_{ij}\nabla_i \phi \nabla_j \phi + 4|\Delta \phi|^2 - 4|\nabla^2 \phi|^2)u + Rk \\ & = \left(\frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{W}}(t) \right) u^{\frac{n+2}{n-2}} + \frac{n+2}{n-2} \widetilde{\mathcal{W}}(t) u^{\frac{4}{n-2}} k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Умножая обе стороны последнего равенства на $2u$, получаем

$$-\frac{8(n-1)}{n-2} u \Delta k + 2Ruk = \frac{16(n-1)}{n-2} u R_{ij} \nabla_i \nabla_j u$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{32(n-1)}{n-2} u \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_i \nabla_j u - \frac{32(n-1)}{n-2} u \Delta \phi \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle \\
& - 2(\Delta R + 2|\operatorname{Ric}|^2 - 8R_{ij} \nabla_i \phi \nabla_j \phi + 4|\Delta \phi|^2 - 4|\nabla^2 \phi|^2) u^2 \\
& + \left(\frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) \right) 2u^{\frac{2n}{n-2}} + 2 \frac{n+2}{n-2} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) u^{\frac{n+2}{n-2}} k.
\end{aligned}$$

Подставляя это в (3.9) для исключения k , имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) &= \int_M \frac{8(n-1)}{n-2} R_{ij} \nabla_i u \nabla_j u \, dV \\
& - \int_M \frac{16(n-1)}{n-2} \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_i u \nabla_j u \, dV - \int_M \frac{32(n-1)}{n-2} u \Delta \phi \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle \, dV \\
& - \int_M (\Delta R + 2|\operatorname{Ric}|^2 - 8R_{ij} \nabla_i \phi \nabla_j \phi + 4|\Delta \phi|^2 - 4|\nabla^2 \phi|^2) u^2 \, dV \\
& + \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R u^2 \right) (-R + 2|\nabla \phi|^2) \, dV \\
& + \int_M \frac{16(n-1)}{n-2} u R_{ij} \nabla_i \nabla_j u \, dV - \int_M \frac{32(n-1)}{n-2} u \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_i \nabla_j u \, dV \\
& + 2 \frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) + 2 \frac{n+2}{n-2} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) \int_M u^{\frac{n+2}{n-2}} k \, dV.
\end{aligned}$$

Дифференцируя (3.6) по t , получаем

$$\int_M u^{\frac{n+2}{n-2}} k \, dV = \frac{n-2}{2n} \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} R \, dV - \frac{n-2}{n} \int_M |\nabla \phi|^2 u^{\frac{2n}{n-2}} \, dV.$$

Интегрируя по частям, выводим

$$\begin{aligned}
\int_M u R_{ij} \nabla_i \nabla_j u \, dV &= -\frac{1}{2} \int_M u \nabla_i R \nabla_i u \, dV - \int_M R_{ij} \nabla_i u \nabla_j u \, dV \\
&= \frac{1}{4} \int_M u^2 \Delta R \, dV - \int_M R_{ij} \nabla_i u \nabla_j u \, dV.
\end{aligned}$$

По правилу Лейбница также имеем

$$2 \int_M u \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_i \nabla_j u \, dV = \int_M \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_i \nabla_j u^2 \, dV - 2 \int_M \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_i u \nabla_j u \, dV.$$

Подстановка последних трех равенств в формулу для $\frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}}(t)$ дает

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) &= \int_M \frac{8(n-1)}{n-2} (R_{ij} - 2\nabla_i \phi \nabla_j \phi) \nabla_i u \nabla_j u \, dV \\
& + \int_M \frac{32(n-1)}{n-2} u \Delta \phi \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle \, dV + \int_M (\Delta R + 2|\operatorname{Ric}|^2 - 8R_{ij} \nabla_i \phi \nabla_j \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4|\Delta\phi|^2 - 4|\nabla^2\phi|^2)u^2 dV + \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + Ru^2 \right) (R - 2|\nabla\phi|^2) dV \\
 & - \int_M \frac{4(n-1)}{n-2} u^2 \Delta R dV + \int_M \frac{16(n-1)}{n-2} \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_i \nabla_j u^2 dV \\
 & - \frac{n+2}{n} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} R dV + \frac{2(n+2)}{n} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} |\nabla\phi|^2 dV. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Исключим теперь $\widetilde{\mathcal{Y}}(t)$ из правой части последнего уравнения. С этой целью умножим обе части (3.5) на Ru и проинтегрируем по частям. Имеем

$$\begin{aligned}
 & - \int_M \frac{2(n-1)}{n-2} u^2 \Delta R dV + \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + Ru^2 \right) R dV \\
 & = \widetilde{\mathcal{Y}}(t) \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} R dV. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Снова умножая (3.5) на $|\nabla\phi|^2 u$ и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
 & - \int_M \frac{2(n-1)}{n-2} u^2 \Delta |\nabla\phi|^2 dV + \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + Ru^2 \right) |\nabla\phi|^2 dV \\
 & = \widetilde{\mathcal{Y}}(t) \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} |\nabla\phi|^2 dV. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Подставляя (3.14) и (3.15) в (3.13), применяя лемму (3.1) к третьему члену в правой части равенства (3.13) и производя некоторые перегруппировки, получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}}(t) = \int_M \left(\frac{8(n-1)}{n-2} S_{ij} \nabla_i u \nabla_j u + 2|\text{Ric}|^2 u^2 \right. \\
 & - \frac{n-2}{n} u^2 \Delta R - \frac{4n^2 + 4n - 8}{n(n-2)} u^2 \Delta |\nabla\phi|^2 \Big) dV - \frac{2}{n} \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + Ru^2 \right) S dV \\
 & + \int_M (-4\Delta |\nabla\phi|^2 + 4|\Delta\phi|^2 + 4|\nabla^2\phi|^2) u^2 dV + \int_M \frac{16(n-1)}{n-2} \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_i \nabla_j u^2 dV \\
 & + \int_M \frac{32(n-1)}{n-2} u \Delta \phi \langle \nabla\phi, \nabla u \rangle dV. \quad \square \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Для постоянного отображения ϕ эволюционное уравнение постоянной Ямабе под действием потока Листа превращается в эволюционное уравнение постоянной Ямабе под действием потока Риччи. Это не является неожиданным, поскольку, когда ϕ постоянно, двойная система (1.1) превращается в уравнение потока Риччи.

Следствие 3.5. Пусть g_0 — метрика постоянной скалярной кривизны на замкнутом многообразии M^n , и пусть $(g(t), \phi(t))$ — решение потока Листа с условием $g(0) = g_0$. Предположим, что $\phi(0)$ — гармоническое отображение с

условием $|\nabla\phi(0)|^2 = R_{g(0)}$. Пусть $u(t) > 0$, $t \in [0, \epsilon)$, для некоторого $\epsilon > 0$ является C^1 -семейством гладких функций с константой $u(0)$ такой, что метрика $u(t)^{\frac{4}{n-2}}g(t)$ имеет единичный объем и постоянную скалярную кривизну $\widetilde{\mathcal{Y}}(t)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) $\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{Y}}(t)|_{t=0} \geq 0$;
- (ii) если $\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{Y}}(t)|_{t=0} = 0$, то метрика g_0 Риччи-плоская.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u(0)$ и $|\nabla\phi(0)|^2 = R_{g(0)}$ постоянны и отображение $\phi(0)$ гармоническое, то $\nabla u(0)$, $\Delta|\nabla\phi(0)|^2$, $\Delta R_{g(0)}$ и $\Delta\phi(0) = 0$ равны нулю. Значит, в силу (3.16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{Y}}(t)\Big|_{t=0} &= 2[u(0)]^2 \int_M |\text{Ric}_{g(0)}|^2 dV + \frac{2}{n}[u(0)]^2 \int_M R_{g(0)}^2 dV \\ &\quad + [u(0)]^2 \int_M |\nabla^2\phi(0)|^2 dV \geq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Поскольку все члены в правой части последнего равенства неотрицательны, получаем, что если производная $\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{Y}}(t)|_{t=0}$ равна нулю, то тензор Риччи $\text{Ric}_{g(0)}$ равен нулю тождественно. Следовательно, метрика g_0 Риччи-плоская. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. В случае потока Риччи при предположении, почти похожем на условие следствия 3.5, в [5, следствие 3] Чжан и Лю показали, что метрика g_0 эйнштейнова. Однако в случае потока Листа мы доказали, что метрика g_0 Риччи-плоская, что является более сильным утверждением.

Заметим, что $\widetilde{\mathcal{Y}}(t)$ с необходимостью не равно постоянной Ямабе $\mathcal{Y}(g(t))$, даже если g_0 удовлетворяет условию $\widetilde{\mathcal{Y}}(0) = \mathcal{Y}(g(0))$. В предположении, что $u(t)^{\frac{4}{n-2}}g(t)$ имеет конечный объем и постоянную скалярную кривизну $\mathcal{Y}(g(t))$, приходим к следующему результату, который утверждает, что в бесконечно малом поток Листа старается увеличить постоянную Ямабе.

Следствие 3.7. Пусть g_0 — метрика постоянной скалярной кривизны на замкнутом многообразии M^n , и пусть $(g(t), \phi(t))$ — решение потока Листа со свойством $g(0) = g_0$. Предположим, что $\phi(0)$ — гармоническое отображение такое, что $|\nabla\phi(0)|^2 = R_{g(0)}$. Пусть также $u(t) > 0$, $t \in [0, \epsilon)$, для некоторого $\epsilon > 0$ является C^1 -семейством гладких функций с постоянной $u(0)$ такой, что метрика $u(t)^{\frac{4}{n-2}}g(t)$ имеет конечный объем и постоянную скалярную кривизну $\mathcal{Y}(g(t))$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) $\frac{d}{dt}\mathcal{Y}(g(t))|_{t=0} \geq 0$;
- (ii) если $\frac{d}{dt}\mathcal{Y}(g(t))|_{t=0} = 0$, то метрика g_0 эйнштейнова;
- (iii) если метрика g_0 удовлетворяет равенству $\mathcal{Y}(g_0) = \sigma(M)$, то g_0 эйнштейнова.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Следующее ниже утверждение и его доказательство вполне аналогичны следствию 6 в [5], которое доказывается с использованием теоремы Койсо [11, следствие 2.9] и того факта, что поток Риччи является деформацией. Поэтому можно повторить доказательство этого следствия, поскольку поток Листа тоже является деформацией. Опустим доказательство из-за его аналогичности.

Следствие 3.9. Пусть $g(t)$ — поток Листа на замкнутом многообразии, где $g(0) = g_0$, и предположим, что сигма-инвариант многообразия M^n реализуется метрикой g_0 , $\mathcal{Y}(g_0) = \sigma(M)$. Пусть $\{\tilde{g}_\alpha\}$ — множество метрик в конформном классе $[g_0]$ таких, что $\mathcal{Y}(\tilde{g}_\alpha) = \sigma(M)$. Допустим, что $R_{\tilde{g}_\alpha}/(n-1)$ для любого α не является собственным значением лапласиана $\Delta_{\tilde{g}_\alpha}$. Тогда g_0 — эйнштейнова метрика и $\tilde{g}_\alpha = g_0$ для любого α .

ЛИТЕРАТУРА

1. List B. Evolution of an extended Ricci flow system: Ph. D. Thes., AEI Potsdam, 2006.
2. DeTurck D. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors // J. Differ. Geom. 1983. V. 18, N 1. P. 157–162.
3. List B. Evolution of an extended Ricci flow system // Comm. Anal. Geom. 2008. V. 16, N 5. P. 1007–1048.
4. Chow B., Knopf D. The Ricci flow: An introduction. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004.
5. Chang S.-C., Lu P. Evolution of Yamabe constant under Ricci flow // AGAG. 2007. V. 31, N 2. P. 147–153.
6. Aubin T. Equations différentielles non-linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire // J. Math. Pures Appl. 1976. V. 55, N 9. P. 269–296.
7. Aubin T. Some nonlinear problems in Riemannian geometry. Berlin: Springer-Verl., 1998.
8. Lee J., Parker T. The Yamabe problem // Bull. Am. Math. Soc. 1987. V. 17, N 1. P. 37–91.
9. Schoen R. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature // J. Differ. Geom. 1984. V. 20, N 2. P. 478–495.
10. Trudinger N. Remarks concerning the conformal deformation of metrics to constant scalar curvature // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. 1968. V. 22, N 2. P. 265–274.
11. Koiso N. A decomposition of the space $\mathcal{M}$ of Riemannian metrics on a manifold // Osaka J. Math. 1979. V. 16, N 2. P. 423–429.

Статья поступила 28 августа 2016 г.

Farzad Daneshvar Pip (Данешвар Пип Фарзад),
Asadollah Razavi (Разави Асадолла)
Department of Mathematics and Computer Science,
Shahid Bahonar University of Kerman,
Kerman, Iran
f.daneshvar@math.uk.ac.ir, arazavi@uk.ac.ir