

УДК 510.223+510.225

ГЕНЕРИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО МНОЖЕСТВА Σ ПО СОЛОВЕЮ В. Г. Кановой, В. А. Любецкий

Аннотация. Доказано, что множество Σ по Соловею является генерическим множеством над исходной моделью в смысле форсинга, отношение порядка которого расширяет отношение порядка данного форсинга.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.610

Ключевые слова: генеричность, множество Σ по Соловею.

1. Введение. Статья Соловея [1] принадлежит к классике форсинга. Ее главный результат — построение указанной в ее названии модели, а также близкой модели, в которой измеримыми по Лебегу утверждаются только определимые множества, но аксиома выбора верна в отличие от первой модели, в которой она по необходимости нарушена. В этой статье Соловей ввел несколько методов в теории множеств, ключевых для последующего развития метода форсинга. Одним из них была «важная лемма» из [1, разд. 4.4], которая утверждает, что любое генерическое расширение исходной модели также является генерическим расширением любой промежуточной модели в смысле определенного форсинга Σ , который является подмножеством исходного форсинга.

В теореме 3 данной статьи доказано, что, в контексте построения Соловея, и само множество Σ генерическое над исходной моделью в смысле форсинга $\mathbb{Q}$, близко связанного с данным форсингом $\mathbb{P}$ в том смысле, что его область равна области данного форсинга $\mathbb{P}$, но само отношение порядка $\leq_{\mathbb{Q}}$ $\subseteq$ -расширяет порядок $\leq_{\mathbb{P}}$ данного форсинга.

В качестве приложения этой теоремы мы излагаем краткое доказательство следующего результата (теорема 4): любая подмодель генерического по Коэну расширения некоторой модели сама является генерическим по Коэну расширением исходной модели (либо совпадает с последней), а с другой стороны, само данное расширение является генерическим по Коэну расширением этой промежуточной подмодели (либо опять совпадает с последней). Этот результат в принципе известен для специалистов в области форсинга, но ни одного опубликованного доказательства нам неизвестно.

2. Множество Соловея Σ . Упомянутый результат Соловея состоит в следующем.

Работа В. Г. Кановой выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 13-01-00006, 17-01-00705). Работа В. А. Любецкого выполнена за счет Российского научного фонда (грант 14-50-00150).

Предложение 1. Предположим, что $\mathbb{P}$ — форсинг в теоретико-множественном универсуме $\mathbf{V}$, множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим множеством над $\mathbf{V}$, $t \in \mathbf{V}$ есть $\mathbb{P}$ -имя, $X = t[G] \subseteq \mathbf{V}$ (через $t[G]$ обозначается G -оценка, или интерпретация, имени t ; $t[G] \in \mathbf{V}[G]$). Тогда существует такое множество $\Sigma = \Sigma(X, t) \in \mathbf{V}[G]$, $\Sigma \subseteq \mathbb{P}$, что

(I) Σ замкнуто вниз в $\mathbb{P}$, т. е. если $q \in \Sigma$, $p \in \mathbb{P}$ и $p \leq q$, то $q \in \Sigma$ ($p \leq q$ означает, что вынуждающее условие q более сильное, чем p);

(II) $\mathbf{V}[\Sigma] = \mathbf{V}[X]$;

(III) $G \subseteq \Sigma$ и G Σ -генерическое над $\mathbf{V}[X]$;

(IV) класс $\mathbf{V}[G]$ есть Σ -генерическое расширение модели $\mathbf{V}[X] = \mathbf{V}[\Sigma]$;

(V) если множество $G' \subseteq \Sigma$ Σ -генерическое над $\mathbf{V}[X]$, то G' $\mathbb{P}$ -генерическое над $\mathbf{V}$ и, кроме того, $t[G'] = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (набросок построения Σ , см. подробное доказательство в [1, 4.4] или [2, 13.3.2]). Полагаем $\Sigma = \mathbb{P} \setminus \bigcup_{\xi < \vartheta} A_\xi$, где ординал ϑ определяется в ходе построения (см. ниже), а последовательность множеств $A_\xi \subseteq \mathbb{P}$ — в $\mathbf{V}[G]$ следующим образом.

(1) A_0 состоит из всех «условий» $p \in \mathbb{P}$, вынуждающих $\check{x} \in t$ для некоторого $x \in \mathbf{V} \setminus X$ или $\check{x} \notin t$ для некоторого $x \in X$ (если $x \in \mathbf{V}$, то $\check{x}$ — каноническое имя для x).

(2) $A_{\xi+1}$ состоит из всех таких «условий» $p \in \mathbb{P}$, для которых существует плотное множество $D \in \mathbf{V}$ в $\mathbb{P}$, удовлетворяющее следующему: если $q \in D$ и $p \leq q$, то $q \in A_\xi$.

(3) $A_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} A_\xi$ для предельных ординалов λ .

Итак, каждое «условие» $p \in A_0$ прямо противоречит допущению, что t — имя для X , по (1), и это противоречие сохраняется в пп. (2) и (3) индуктивного определения для все больших индексов ξ соответственно во все более не прямой форме. Эта $\subseteq$ -возрастающая последовательность множеств $A_\xi \subseteq \mathbb{P}$ стабилизируется на каком-то предельном ординале $\vartheta \in \mathbf{V}$, и имеем множества $A = \bigcup_{\xi < \vartheta} A_\xi$ и $\Sigma = \mathbb{P} \setminus A$. $\square$

Следующие работы (см. [3] и др.) о промежуточных подмоделях генерических расширений показали, что не только $\mathbf{V}[G]$ является генерическим расширением промежуточной модели $\mathbf{V}[X]$ согласно (III), но и сама промежуточная модель $\mathbf{V}[X]$ есть генерическое расширение исходной модели $\mathbf{V}$ (см. также [4, факт 11; 5, 15.43; 6, 10.10; 7; 8, разд. 1] среди других ссылок). Теорема 3 ниже (наш главный результат) свидетельствует, что на самом деле уже само $\Sigma(X, t)$ является генерическим множеством над $\mathbf{V}$ в смысле одного форсинга, тесно связанного с данным форсингом $\mathbb{P}$.

3. Генеричность множества Σ . Рассуждая в контексте предложения 1, определим новый частичный порядок $\leq_t$ на $\mathbb{P}$, который продолжает данное отношение порядка $\leq = \leq_{\mathbb{P}}$, так: $p \leq_t q$, если «условие» q $\mathbb{P}$ -вынуждает над $\mathbf{V}$, что $\check{p} \in \Sigma(\check{t}[G], \check{t})$. Другими словами, для $p \leq_t q$ необходимо и достаточно, чтобы соотношение $p \in \Sigma(X, t)$ выполнялось всякий раз, когда множество $G \subseteq \mathbb{P}$ генерическое над $\mathbf{V}$, $X = t[G]$ и $q \in G$.

Лемма 2. Отношение $\leq_t$ является отношением частичного порядка на $\mathbb{P}$, принадлежит $\mathbf{V}$ и продолжает данный порядок $\leq = \leq_{\mathbb{P}}$, т. е. $\leq_{\mathbb{P}} \subseteq \leq_t$ (или, что равносильно, соотношение $p \leq_{\mathbb{P}} q$ влечет $p \leq_t q$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $p \leq_t q \leq_t r$. Чтобы вывести $p \leq_t r$, допустим, что множество $G \subseteq \mathbb{P}$ генерическое над V , $r \in G$ и $X = t[G]$; требуется проверить, что $p \in \Sigma(X, t)$.

По определению $q \in \Sigma(X, t)$. Рассмотрим любое множество $G' \subseteq \Sigma(X, t)$, $\Sigma(X, t)$ -генерическое над $V[X]$ и содержащее q . Тогда G' $\mathbb{P}$ -генерическое над V и $t[G'] = X$ согласно (V). Поэтому $p \in \Sigma(X, t)$, так как $p \leq_t q$, что и требовалось.

Наконец, предположим, что $p \leq q$, и выведем $p \leq_t q$. Рассмотрим любое множество $G \subseteq \mathbb{P}$, генерическое над V и содержащее $q \in G$, и пусть $X = t[G]$. Чтобы доказать $p \in \Sigma(X, t)$, заметим, что $q \in \Sigma(X, t)$ согласно (III); теперь $p \in \Sigma(X, t)$ по (I). $\square$

Теорема 3 (в условиях предложения 1). Пусть $G \subseteq \mathbb{P}$ является генерическим множеством над V и $X = t[G]$. Тогда множество $\Sigma = \Sigma(X, t)$ само генерическое над V в смысле форсинга $\mathbb{P}_t = \langle \mathbb{P}; \leq_t \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $p \in \mathbb{P}$, $q \in \Sigma$ и $p \leq_t q$. Чтобы вывести $p \in \Sigma$, рассмотрим любое множество $G' \subseteq \Sigma$, Σ -генерическое над $V[X]$ и содержащее q . Тогда G' $\mathbb{P}$ -генерическое над V и $t[G'] = X$ согласно (V). Стало быть, $p \in \Sigma$, так как $p \leq_t q$.

Докажем, что любые два «условия» $p, q \in \Sigma$ $\leq_t$ -совместны в Σ . Ввиду генеричности имеется «условие» $r \in G$, вынуждающее как $\check{p} \in \Sigma(\check{t}[G], \check{t})$, так и $\check{q} \in \Sigma(\check{t}[G], \check{t})$. Тогда по определению получаем $p \leq_t r$ и $q \leq_t r$, а с другой стороны, $r \in \Sigma$ согласно (III).

Проверим само условие генеричности. Рассмотрим произвольное $\leq_t$ -плотное множество $D \subseteq \mathbb{P}$ (не обязательно плотное по отношению к исходному порядку $\leq$). Пусть, напротив, какое-то «условие» $p \in G$ вынуждает, что $\check{D} \cap \Sigma(\check{t}[G], \check{t}) = \emptyset$. Согласно плотности имеется «условие» $q \in D$, удовлетворяющее $p \leq_t q$.

Теперь рассмотрим произвольное множество $G' \subseteq \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ -генерическое над V и содержащее q , и пусть $X' = t[G']$. Тогда $q \in G' \subseteq \Sigma' = \Sigma(X', t)$, откуда по доказанному следует $p \in \Sigma'$.

Наконец, рассмотрим множество $G'' \subseteq \Sigma'$, Σ' -генерическое над $V[X']$ и содержащее p . Тогда G'' $\mathbb{P}$ -генерическое над V и $t[G''] = X'$ согласно (V). Таким образом, $q \in D \cap \Sigma(t[G''], t)$ и $p \in G''$, и приходим к противоречию с выбором «условия» p . $\square$

4. Промежуточные подмодели генерических расширений по Коэну. Напомним, что генерические расширения по Коэну используют форсинг $\mathbb{C} = 2^{<\omega}$ (все конечные диадические последовательности).

Теорема 4 (фольклор форсинга). Пусть точка $a \in 2^\omega$ генерическая по Коэну над универсумом V и $X \in V[a]$, $X \subseteq V$. Тогда

- (i) либо $X \in V$, либо модель $V[X]$ есть генерическое по Коэну расширение универсума V ;
- (ii) либо $V[X] = V[a]$, либо $V[a]$ есть генерическое по Коэну расширение модели $V[X]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэнов форсинг $\mathbb{C} = 2^{<\omega}$, очевидно, счетен. Поэтому при $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ как форсинг Σ в предложении 1, так и форсинг $\mathbb{Q}$ в теореме 3 счетны, а счетный форсинг, как известно, либо тривиален, либо производит именно коэновское расширение. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. Math. 1970. V. 92. P. 1–56.
2. Кановой В. Г., Любецкий В. А. Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы. М.: МЦНМО, 2013.
3. Grigorieff S. Intermediate submodels and generic extensions of set theory // Ann. Math. 1975. V. 101. P. 447–490.
4. Fuchs G., Hamkins J. D., Reitz J. Set-theoretic geology // Ann. Pure Appl. Logic. 2015. V. 166, N 4. P. 464–501.
5. Jech T. Set theory. The third millennium revised and expanded. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 2003.
6. Kanamori A. The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings. Berlin: Springer, 2003.
7. Кановой В. Г., Любецкий В. А. Обобщение одной конструкции Соловея // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1341–1350.
8. Zapletal J. Terminal notions in set theory // Ann. Pure Appl. Logic. 2001. V. 109, N 1–2. P. 89–116.

Статья поступила 2 ноября 2016 г.

Кановой Владимир Григорьевич (автор для контактов)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Большой Каретный переулок, 19, стр. 1, Москва 127051;
Российский университет транспорта (МИИТ),
ул. Образцова, 9, стр. 9, Москва 127994
kanovei@iitp.ru

Любецкий Василий Александрович
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Большой Каретный переулок, 19, стр. 1, Москва 127051
lyubetsk@iitp.ru