

УДК 512.542.5

О ГЛАВНЫХ ФАКТОРАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП
СПЕЦИАЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ
ГРУПП ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЛИЕВА ТИПА
В. В. Кораблева

Аннотация. Для конечных простых групп $F_4(2^n)$ и $G_2(p^n)$ при $p \leq 3$ приводится описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унитарный радикал. Для каждой параболической максимальной подгруппы групп $F_4(2^n)$, $G_2(2^n)$ и $G_2(3^n)$ дается фрагмент ее главного ряда, входящий в унитарный радикал этой параболической подгруппы. Приводятся три таблицы, в которых указываются порождающие элементы соответствующих главных факторов.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.612

Ключевые слова: конечная группа лиева типа, параболическая подгруппа, главный фактор, унитарный радикал.

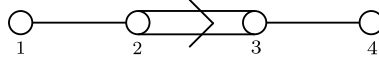
Введение

Пусть G — конечная простая группа нормального лиева типа (группа Шевалле) над конечным полем K характеристики p и $P = UL$ — параболическая максимальная подгруппа в G , где U — унитарный радикал и L — дополнение Леви в P . Группа лиева типа над полем характеристики p называется *специальной*, если $p = 2$ для групп типа B_l , C_l , F_4 и $p \leq 3$ для групп типа G_2 . Из результатов работы [1] следует, что для неспециальных групп G факторы нижнего центрального ряда группы U являются главными факторами группы P и неприводимыми KL -модулями. Число этих факторов не зависит от поля K , а зависит только от лиева типа группы G . В исключаемых случаях коммутаторные соотношения, влияющие на структуру унитарных подгрупп группы G , ведут себя специальным образом и требуют отдельного рассмотрения.

Эта статья является продолжением работ [2–5], в которых было получено уточненное описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унитарный радикал, для всех конечных простых групп лиева типа (нормальных и скрученных), за исключением специальных групп. В настоящей работе мы приводим такое описание для специальных групп исключительных лиевых типов F_4 и G_2 . Наша цель — доказать следующие две теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

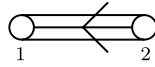
Теорема 1. Пусть $G = F_4(2^n)$ и $P_k = U_k L_k$ — параболическая максимальная подгруппа в G , полученная удалением k -й вершины ее диаграммы Дынкина в стандартном упорядочении вершин



Тогда

- (1) нижний центральный ряд группы U_k имеет вид $U_k > Y_1 > 1$ при $k \in \{1, 4\}$ и $U_k > Y_3 > Y_1 > 1$ при $k \in \{2, 3\}$;
- (2) фрагмент главного ряда группы P_k , полученный уплотнением нижнего центрального ряда ее унитарного радикала, при $k \in \{1, 4\}$ имеет вид $U_k = Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1$, где $|Y_3/Y_2| = 2^{8n}$, $|Y_2/Y_1| = 2^{6n}$, $|Y_1| = 2^n$, а при $k \in \{2, 3\}$ — вид $U_k = Y_5 > Y_4 > Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1$, где $|Y_5/Y_4| = |Y_4/Y_3| = 2^{6n}$, $|Y_3/Y_2| = |Y_2/Y_1| = 2^{3n}$, $|Y_1| = 2^{2n}$;
- (3) главные факторы Y_5/Y_4 , Y_4/Y_3 , Y_3/Y_2 , Y_2/Y_1 и Y_1 являются неприводимыми $GF(2^n)L_k$ -модулями, старший вес и размерность которых указаны в табл. 1.

Теорема 2. Пусть $G = G_2(p^n)$ и $P_k = U_k L_k$ — параболическая максимальная подгруппа группы G , полученная удалением k -й вершины ее диаграммы Дынкина в стандартном упорядочении вершин



Тогда

- (1) нижний центральный ряд группы U_k для $k \in \{1, 2\}$ имеет вид $U_k > Y_1 > 1$;
- (2) при $p = 2$
 - (а) фрагмент главного ряда группы P_k , полученный уплотнением нижнего центрального ряда ее унитарного радикала, для $k = 1$ имеет вид $U_1 = Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1$, где $|Y_3/Y_2| = |Y_1| = 2^{2n}$, $|Y_2/Y_1| = 2^n$, а для $k = 2$ — вид $U_2 = Y_2 > Y_1 > 1$, где $|Y_2/Y_1| = 2^{4n}$, $|Y_1| = 2^n$;
 - (б) главные факторы Y_3/Y_2 , Y_2/Y_1 и Y_1 являются неприводимыми $GF(2^n)L_k$ -модулями, старший вес и размерность которых указаны в табл. 2;
- (3) при $p = 3$ и любом $k \in \{1, 2\}$
 - (а) фрагмент главного ряда группы P_k , полученный уплотнением нижнего центрального ряда ее унитарного радикала, имеет вид $U_k = Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1$, где $|Y_3/Y_2| = |Y_2/Y_1| = 3^{2n}$ и $|Y_1| = 3^n$;
 - (б) главные факторы Y_3/Y_2 , Y_2/Y_1 и Y_1 являются неприводимыми $GF(3^n)L_k$ -модулями, старший вес и размерность которых указаны в табл. 3.

Полезные следствия из доказательства этих теорем составляют содержание трех таблиц, которые приведены в тексте работы.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Будем использовать определения и обозначения, связанные с группами Ли-ева типа, из [6]. Пусть Φ — система корней группы G , $\pi = \{p_1, \dots, p_l\}$ — ее множество простых корней и Φ^+ — множество положительных корней в Φ относительно π . Известно, что $G = \langle x_r(a) \mid a \in K, r \in \Phi \rangle$ и для любого корня $r \in \Phi$ корневая подгруппа $X_r = \{x_r(a) \mid a \in K\}$ изоморфна полю K . Для любого $k \in \{1, \dots, l\}$ обозначим через Φ_k множество корней из Φ , натянутых на

$\pi \setminus \{p_k\}$, и положим $\Phi_k^+ = \Phi^+ \cap \Phi_k$. В группе G имеется с точностью до сопряжения l параболических максимальных подгрупп P_k . Известно разложение Леви группы P_k : $P_k = U_k L_k$, где $U_k = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_k^+ \rangle$ — унипотентный радикал, $L_k = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_k \rangle$ — дополнение Леви в P_k , а H — подгруппа Картана в G .

Пусть $I \subset J \subseteq \Phi^+ \setminus \Phi_k^+$ и $Y = \langle X_r \mid r \in J \rangle$, $Z = \langle X_r \mid r \in I \rangle$ — нормальные в P_k подгруппы. Тогда фактор-группа Y/Z изоморфна $\prod X_r$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем положительным корням $r \in J \setminus I$. Подгруппа Леви L_k действует сопряжениями на фактор-группе Y/Z . Если $r \in J \setminus I$, то положим $sx_r(a)Z = x_r(ca)Z$ для элементов $a, c \in K$. Таким образом, фактор-группа Y/Z становится KL_k -модулем.

Рассмотрим сначала систему корней Φ типа F_4 и поле $K = GF(2^n)$. Множество Φ^+ состоит из элементов

$$\begin{array}{lll} r_1 = p_1, & r_9 = p_2 + 2p_3, & r_{17} = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4, \\ r_2 = p_2, & r_{10} = p_2 + p_3 + p_4, & r_{18} = p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4, \\ r_3 = p_3, & r_{11} = p_1 + p_2 + 2p_3, & r_{19} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + p_4, \\ r_4 = p_4, & r_{12} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4, & r_{20} = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 2p_4, \\ r_5 = p_1 + p_2, & r_{13} = p_2 + 2p_3 + p_4, & r_{21} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4, \\ r_6 = p_2 + p_3, & r_{14} = p_1 + 2p_2 + 2p_3, & r_{22} = p_1 + 2p_2 + 4p_3 + 2p_4, \\ r_7 = p_3 + p_4, & r_{15} = p_1 + p_2 + 2p_3 + p_4, & r_{23} = p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 2p_4, \\ r_8 = p_1 + p_2 + p_3, & r_{16} = p_2 + 2p_3 + 2p_4, & r_{24} = 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 2p_4. \end{array}$$

Занумеруем корни r из Φ числами от 1 до 48 так: присвоим номер i положительному корню r_i , соответствующему отрицательному корню $-r_i$ присвоим номер $24 + i$, а элементы $x_{r_i}(a)$ и $x_{-r_i}(a)$ из $F_4(2^n)$ обозначим через $x_i(a)$ и $x_{i+24}(a)$ соответственно, $1 \leq i \leq 24$. Корневую подгруппу $\{x_j(a) \mid t \in GF(2^n)\}$ обозначаем через X_j , $1 \leq j \leq 48$.

В случае системы корней типа G_2 множество Φ^+ состоит из элементов $r_1 = p_1$, $r_2 = p_2$, $r_3 = p_1 + p_2$, $r_4 = 2p_1 + p_2$, $r_5 = 3p_1 + p_2$, $r_6 = 3p_1 + 2p_2$. Нумеруем корни, корневые элементы и корневые подгруппы для группы $G_2(p^n)$ аналогично предыдущему абзацу.

2. Доказательство теоремы 1

Для параболической максимальной подгруппы $P_1 = U_1 L_1$, где $U_1 = \langle X_j \mid j \in \{1, 5, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\} \rangle$ и $L_1 = \langle H, X_j \mid j \in \{2, 26, 3, 27, 4, 28, 6, 30, 7, 31, 9, 33, 10, 34, 13, 37, 16, 40\} \rangle$, приведем все нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых порождающих унипотентного радикала U_1 , вытекающие (см. [6, теорема 5.22]) из коммутаторной формулы Шевалле ($a, b \in K$):

$$[x_1(a), x_{23}(b)] = x_{24}(ab), \quad [x_5(a), x_{22}(b)] = x_{24}(ab),$$

$$[x_{11}(a), x_{20}(b)] = x_{24}(ab), \quad [x_{14}(a), x_{18}(b)] = x_{24}(ab).$$

Пусть $Y_1 = X_{24}$ и $Y_2 = \langle X_8, X_{12}, X_{15}, X_{17}, X_{19}, X_{21}, X_{24} \rangle$. Тогда Y_1 является минимальной нормальной подгруппой, а Y_2 — нормальной подгруппой в P_1 . Действие (сопряжениями) L_1 на Y_2/Y_1 задается следующими коммутаторными

соотношениями $(a, b \in K)$:

$$\begin{aligned}
 [x_4(a), x_8(b)]Y_1 &= x_{12}(ab)Y_1, & [x_7(a), x_8(b)]Y_1 &= x_{15}(ab)Y_1, \\
 [x_{10}(a), x_8(b)]Y_1 &= x_{17}(ab)Y_1, & [x_{13}(a), x_8(b)]Y_1 &= x_{19}(ab)Y_1, \\
 [x_{16}(a), x_8(b)]Y_1 &= x_{21}(ab)Y_1, & [x_3(a), x_{12}(b)]Y_1 &= x_{15}(ab)Y_1, \\
 [x_{28}(a), x_{12}(b)]Y_1 &= x_8(ab)Y_1, & [x_9(a), x_{12}(b)]Y_1 &= x_{19}(ab)Y_1, \\
 [x_{13}(a), x_{12}(b)]Y_1 &= x_{21}(ab)Y_1, & [x_2(a), x_{15}(b)]Y_1 &= x_{17}(ab)Y_1, \\
 [x_{27}(a), x_{15}(b)]Y_1 &= x_{12}(ab)Y_1, & [x_6(a), x_{15}(b)]Y_1 &= x_{19}(ab)Y_1, \\
 [x_{31}(a), x_{15}(b)]Y_1 &= x_8(ab)Y_1, & [x_{10}(a), x_{15}(b)]Y_1 &= x_{21}(ab)Y_1, \\
 [x_{26}(a), x_{17}(b)]Y_1 &= x_{15}(ab)Y_1, & [x_3(a), x_{17}(b)]Y_1 &= x_{19}(ab)Y_1, \\
 [x_{30}(a), x_{17}(b)]Y_1 &= x_{12}(ab)Y_1, & [x_7(a), x_{17}(b)]Y_1 &= x_{21}(ab)Y_1, \\
 [x_{34}(a), x_{17}(b)]Y_1 &= x_8(ab)Y_1, & [x_{27}(a), x_{19}(b)]Y_1 &= x_{17}(ab)Y_1, \\
 [x_4(a), x_{19}(b)]Y_1 &= x_{21}(ab)Y_1, & [x_{30}(a), x_{19}(b)]Y_1 &= x_{15}(ab)Y_1, \\
 [x_{33}(a), x_{19}(b)]Y_1 &= x_{12}(ab)Y_1, & [x_{37}(a), x_{19}(b)]Y_1 &= x_8(ab)Y_1, \\
 [x_{28}(a), x_{21}(b)]Y_1 &= x_{19}(ab)Y_1, & [x_{31}(a), x_{21}(b)]Y_1 &= x_{17}(ab)Y_1, \\
 [x_{34}(a), x_{21}(b)]Y_1 &= x_{15}(ab)Y_1, & [x_{37}(a), x_{21}(b)]Y_1 &= x_{12}(ab)Y_1, \\
 [x_{40}(a), x_{21}(b)]Y_1 &= x_8(ab)Y_1, & [x_6(a), x_{12}(b)]Y_1 &= x_{17}(ab)Y_1,
 \end{aligned}$$

поэтому L_1 действует неприводимо на Y_2/Y_1 . Получаем фрагмент $Y_2 > Y_1 > 1$ главного ряда группы P_1 .

Рассмотрим нормальную подгруппу U_1/Y_2 в группе P_1/Y_2 . Действие L_1 на нее задается следующими коммутаторными соотношениями $(a, b \in K)$:

$$\begin{aligned}
 [x_2(a), x_1(b)]Y_2 &= x_5(ab)Y_2, & [x_6(a), x_1(b)]Y_2 &= x_{14}(a^2b)Y_2, \\
 [x_9(a), x_1(b)]Y_2 &= x_{11}(ab)Y_2, & [x_{10}(a), x_1(b)]Y_2 &= x_{20}(a^2b)Y_2, \\
 [x_{13}(a), x_1(b)]Y_2 &= x_{22}(a^2b)Y_2, & [x_{16}(a), x_1(b)]Y_2 &= x_{18}(ab)Y_2, \\
 [x_{26}(a), x_5(b)]Y_2 &= x_1(ab)Y_2, & [x_3(a), x_5(b)]Y_2 &= x_{11}(a^2b)Y_2, \\
 [x_7(a), x_5(b)]Y_2 &= x_{18}(a^2b)Y_2, & [x_9(a), x_5(b)]Y_2 &= x_{14}(ab)Y_2, \\
 [x_{13}(a), x_5(b)]Y_2 &= x_{23}(a^2b)Y_2, & [x_{16}(a), x_5(b)]Y_2 &= x_{20}(ab)Y_2, \\
 [x_2(a), x_{11}(b)]Y_2 &= x_{14}(ab)Y_2, & [x_{27}(a), x_{11}(b)]Y_2 &= x_5(a^2b)Y_2, \\
 [x_4(a), x_{11}(b)]Y_2 &= x_{18}(a^2b)Y_2, & [x_{33}(a), x_{11}(b)]Y_2 &= x_1(ab)Y_2, \\
 [x_{10}(a), x_{11}(b)]Y_2 &= x_{23}(a^2b)Y_2, & [x_{16}(a), x_{11}(b)]Y_2 &= x_{22}(ab)Y_2, \\
 [x_{26}(a), x_{14}(b)]Y_2 &= x_{11}(ab)Y_2, & [x_4(a), x_{14}(b)]Y_2 &= x_{20}(a^2b)Y_2, \\
 [x_{30}(a), x_{14}(b)]Y_2 &= x_1(a^2b)Y_2, & [x_7(a), x_{14}(b)]Y_2 &= x_{22}(a^2b)Y_2, \\
 [x_{33}(a), x_{14}(b)]Y_2 &= x_5(ab)Y_2, & [x_{16}(a), x_{14}(b)]Y_2 &= x_{23}(ab)Y_2, \\
 [x_2(a), x_{18}(b)]Y_2 &= x_{20}(ab)Y_2, & [x_{28}(a), x_{18}(b)]Y_2 &= x_{11}(a^2b)Y_2, \\
 [x_6(a), x_{18}(b)]Y_2 &= x_{23}(a^2b)Y_2, & [x_{31}(a), x_{18}(b)]Y_2 &= x_5(a^2b)Y_2, \\
 [x_9(a), x_{18}(b)]Y_2 &= x_{22}(ab)Y_2, & [x_{40}(a), x_{18}(b)]Y_2 &= x_1(ab)Y_2, \\
 [x_{26}(a), x_{20}(b)]Y_2 &= x_{18}(ab)Y_2, & [x_3(a), x_{20}(b)]Y_2 &= x_{22}(a^2b)Y_2, \\
 [x_{28}(a), x_{20}(b)]Y_2 &= x_{14}(a^2b)Y_2, & [x_9(a), x_{20}(b)]Y_2 &= x_{23}(ab)Y_2, \\
 [x_{34}(a), x_{20}(b)]Y_2 &= x_1(a^2b)Y_2, & [x_{40}(a), x_{20}(b)]Y_2 &= x_5(ab)Y_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_2(a), x_{22}(b)]Y_2 &= x_{23}(ab)Y_2, & [x_{27}(a), x_{22}(b)]Y_2 &= x_{20}(a^2b)Y_2, \\
[x_{31}(a), x_{22}(b)]Y_2 &= x_{14}(a^2b)Y_2, & [x_{33}(a), x_{22}(b)]Y_2 &= x_{18}(ab)Y_2, \\
[x_{37}(a), x_{22}(b)]Y_2 &= x_1(a^2b)Y_2, & [x_{40}(a), x_{22}(b)]Y_2 &= x_{11}(ab)Y_2, \\
[x_{26}(a), x_{23}(b)]Y_2 &= x_{22}(ab)Y_2, & [x_{30}(a), x_{23}(b)]Y_2 &= x_{18}(a^2b)Y_2, \\
[x_{33}(a), x_{23}(b)]Y_2 &= x_{20}(ab)Y_2, & [x_{37}(a), x_{23}(b)]Y_2 &= x_5(a^2b)Y_2, \\
[x_{40}(a), x_{23}(b)]Y_2 &= x_{14}(ab)Y_2, & [x_{34}(a), x_{23}(b)]Y_2 &= x_{11}(a^2b)Y_2,
\end{aligned}$$

поэтому L_1 действует неприводимо на U_1/Y_2 . Получаем другой фрагмент $U_1 > Y_2$ главного ряда группы P_1 .

Рассмотрим в группе $F_4(2^n)$ другую параболическую максимальную подгруппу $P_2 = U_2L_2$, где $U_2 = \langle X_j \mid 2 \leq j \leq 24, j \neq 3, 4, 7 \rangle$ и $L_2 = \langle H, X_1, X_{25}, X_3, X_{27}, X_4, X_{28}, X_7, X_{31} \rangle$. Приведем все нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых порождающих унипотентного радикала U_2 , вытекающие из коммутаторной формулы Шевалле ($a, b \in K$):

$$\begin{aligned}
[x_2(a), x_{11}(b)] &= x_{14}(ab), & [x_2(a), x_{15}(b)] &= x_{17}(ab)x_{24}(ab^2), \\
[x_2(a), x_{18}(b)] &= x_{20}(ab), & [x_2(a), x_{22}(b)] &= x_{23}(ab), \\
[x_5(a), x_9(b)] &= x_{14}(ab), & [x_5(a), x_{13}(b)] &= x_{17}(ab)x_{23}(ab^2), \\
[x_5(a), x_{16}(b)] &= x_{20}(ab), & [x_5(a), x_{22}(b)] &= x_{24}(ab), \\
[x_6(a), x_{12}(b)] &= x_{17}(ab), & [x_6(a), x_{15}(b)] &= x_{19}(ab), \\
[x_6(a), x_{18}(b)] &= x_{21}(ab)x_{23}(a^2b), & [x_8(a), x_{10}(b)] &= x_{17}(ab), \\
[x_8(a), x_{13}(b)] &= x_{19}(ab), & [x_8(a), x_{16}(b)] &= x_{21}(ab)x_{24}(a^2b), \\
[x_9(a), x_{12}(b)] &= x_{19}(ab)x_{24}(ab^2), & [x_9(a), x_{18}(b)] &= x_{22}(ab), \\
[x_9(a), x_{20}(b)] &= x_{23}(ab), & [x_{10}(a), x_{11}(b)] &= x_{19}(ab)x_{23}(a^2b), \\
[x_{10}(a), x_{15}(b)] &= x_{21}(ab), & [x_{11}(a), x_{16}(b)] &= x_{22}(ab), \\
[x_{11}(a), x_{20}(b)] &= x_{24}(ab), & [x_{12}(a), x_{13}(b)] &= x_{21}(ab), \\
[x_{14}(a), x_{16}(b)] &= x_{23}(ab), & [x_{14}(a), x_{18}(b)] &= x_{24}(ab).
\end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что группа $Y_2 = \langle X_{17}, X_{19}, X_{21}, X_{23}, X_{24} \rangle$ является нормальной подгруппой в P_2 . Действие L_2 на нее задается следующими соотношениями ($a, b \in K$):

$$\begin{aligned}
[x_1(a), x_{23}(b)] &= x_{24}(ab), & [x_3(a), x_{17}(b)] &= x_{19}(ab), \\
[x_4(a), x_{19}(b)] &= x_{21}(ab), & [x_7(a), x_{17}(b)] &= x_{21}(ab), \\
[x_{25}(a), x_{24}(b)] &= x_{23}(ab), & [x_{27}(a), x_{19}(b)] &= x_{17}(ab), \\
[x_{28}(a), x_{21}(b)] &= x_{19}(ab), & [x_{31}(a), x_{21}(b)] &= x_{17}(ab).
\end{aligned}$$

Это действие приводимо. Укажем в Y_2 две минимальные нормальные в P_2 подгруппы $B = \langle X_{17}, X_{19}, X_{21} \rangle$ и $Y_1 = \langle X_{23}, X_{24} \rangle$. Тогда L_2 действует неприводимо на каждой фактор-группе Y_2/B и Y_2/Y_1 . Получаем фрагменты $Y_2 > B > 1$ и $Y_2 > Y_1 > 1$ главных рядов группы P_2 .

Приведем нетривиальные коммутаторные соотношения в фактор-группе U_2/Y_2 ($a, b \in K$):

$$\begin{aligned}
[x_2(a), x_{11}(b)]Y_2 &= x_{14}(ab)Y_2, & [x_2(a), x_{18}(b)]Y_2 &= x_{20}(ab)Y_2, \\
[x_5(a), x_9(b)]Y_2 &= x_{14}(ab)Y_2, & [x_5(a), x_{16}(b)]Y_2 &= x_{20}(ab)Y_2, \\
[x_9(a), x_{18}(b)]Y_2 &= x_{22}(ab)Y_2, & [x_{11}(a), x_{16}(b)]Y_2 &= x_{22}(ab)Y_2.
\end{aligned}$$

Рассмотрим нормальную в P_2 подгруппу $Y_3 = \langle X_{14}, X_{20}, X_{22}, X_{17}, X_{19}, X_{21}, X_{23}, X_{24} \rangle$. Действие L_2 на Y_3/Y_2 задается следующими коммутаторными соотношениями ($a, b \in K$):

$$\begin{aligned} [x_3(a), x_{20}(b)]Y_2 &= x_{22}(a^2b)Y_2, & [x_4(a), x_{14}(b)]Y_2 &= x_{20}(a^2b)Y_2, \\ [x_7(a), x_{14}(b)]Y_2 &= x_{22}(a^2b)Y_2, & [x_{27}(a), x_{22}(b)]Y_2 &= x_{20}(a^2b)Y_2, \\ [x_{28}(a), x_{20}(b)]Y_2 &= x_{14}(a^2b)Y_2, & [x_{31}(a), x_{22}(b)]Y_2 &= x_{14}(a^2b)Y_2, \end{aligned}$$

это действие неприводимо. Получаем фрагмент $Y_3 > Y_2$ главного ряда группы P_2 .

Рассмотрим нормальную в P_2 подгруппу $Y_4 = \langle X_6, X_8, X_{10}, X_{12}, X_{13}, X_{15}, X_{14}, X_{17}, X_{19}, X_{20}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24} \rangle$. Действие L_2 на группу Y_4/Y_3 задается следующими коммутаторными соотношениями ($a, b \in K$):

$$\begin{aligned} [x_4(a), x_6(b)]Y_3 &= x_{10}(ab)Y_3, & [x_7(a), x_6(b)]Y_3 &= x_{13}(ab)Y_3, \\ [x_4(a), x_8(b)]Y_3 &= x_{12}(ab)Y_3, & [x_7(a), x_8(b)]Y_3 &= x_{15}(ab)Y_3, \\ [x_{25}(a), x_8(b)]Y_3 &= x_6(ab)Y_3, & [x_1(a), x_{10}(b)]Y_3 &= x_{12}(ab)Y_3, \\ [x_3(a), x_{10}(b)]Y_3 &= x_{13}(ab)Y_3, & [x_{28}(a), x_{10}(b)]Y_3 &= x_6(ab)Y_3, \\ [x_3(a), x_{12}(b)]Y_3 &= x_{15}(ab)Y_3, & [x_{25}(a), x_{12}(b)]Y_3 &= x_{10}(ab)Y_3, \\ [x_{28}(a), x_{12}(b)]Y_3 &= x_8(ab)Y_3, & [x_1(a), x_{13}(b)]Y_3 &= x_{15}(ab)Y_3, \\ [x_{27}(a), x_{13}(b)]Y_3 &= x_{10}(ab)Y_3, & [x_{31}(a), x_{13}(b)]Y_3 &= x_6(ab)Y_3, \\ [x_{25}(a), x_{15}(b)]Y_3 &= x_{13}(ab)Y_3, & [x_{27}(a), x_{15}(b)]Y_3 &= x_{12}(ab)Y_3, \\ [x_{31}(a), x_{15}(b)]Y_3 &= x_8(ab)Y_3, & [x_1(a), x_6(b)]Y_3 &= x_8(ab)Y_3, \end{aligned}$$

и это действие неприводимо на ней. Получаем фрагмент $Y_4 > Y_3$ главного ряда группы P_2 .

Подгруппа U_2/Y_4 нормальна в P_2/Y_4 . Неприводимое действие L_2 на эту подгруппу задается следующими коммутаторными соотношениями ($a, b \in K$):

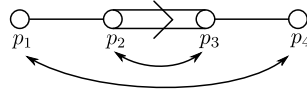
$$\begin{aligned} [x_1(a), x_2(b)]Y_4 &= x_5(ab)Y_4, & [x_3(a), x_2(b)]Y_4 &= x_9(a^2b)Y_4, \\ [x_7(a), x_2(b)]Y_4 &= x_{16}(a^2b)Y_4, & [x_3(a), x_5(b)]Y_4 &= x_{11}(a^2b)Y_4, \\ [x_7(a), x_5(b)]Y_4 &= x_{18}(a^2b)Y_4, & [x_{25}(a), x_5(b)]Y_4 &= x_2(ab)Y_4, \\ [x_1(a), x_9(b)]Y_4 &= x_{11}(ab)Y_4, & [x_4(a), x_9(b)]Y_4 &= x_{16}(a^2b)Y_4, \\ [x_{27}(a), x_9(b)]Y_4 &= x_2(a^2b)Y_4, & [x_4(a), x_{11}(b)]Y_4 &= x_{18}(a^2b)Y_4, \\ [x_{25}(a), x_{11}(b)]Y_4 &= x_9(ab)Y_4, & [x_{27}(a), x_{11}(b)]Y_4 &= x_5(a^2b)Y_4, \\ [x_1(a), x_{16}(b)]Y_4 &= x_{18}(ab)Y_4, & [x_{28}(a), x_{16}(b)]Y_4 &= x_9(a^2b)Y_4, \\ [x_{31}(a), x_{16}(b)]Y_4 &= x_2(a^2b)Y_4, & [x_{25}(a), x_{18}(b)]Y_4 &= x_{16}(ab)Y_4, \\ [x_{28}(a), x_{18}(b)]Y_4 &= x_{11}(a^2b)Y_4, & [x_{31}(a), x_{18}(b)]Y_4 &= x_5(a^2b)Y_4. \end{aligned}$$

Получаем последний фрагмент $U_2 = Y_5 > Y_4$ главного ряда группы P_2 .

Существует [6, лемма 12.3.2] подстановка

$$(1, 4)(2, 3)(5, 7)(6, 9)(8, 16)(10, 11)(12, 18)(13, 14)(15, 20)(17, 22)(19, 23)(21, 24)$$

множества положительных корней Φ^+ , индуцированная симметрией диаграммы Дынкина типа F_4



Соответствующий этой подстановке графовый автоморфизм группы $F_4(2^n)$ отображает параболические максимальные подгруппы P_1 и P_2 в параболические максимальные подгруппы P_4 и P_3 соответственно (см. [6, предложение 12.3.3]). Это позволяет выписать главные факторы и соответствующие главные ряды для параболических максимальных подгрупп P_3 и P_4 . Теорема 1 доказана.

Занесем полученные при доказательстве теоремы 1 результаты в табл. 1. Во втором столбце таблицы укажем главные факторы Y_{i+1}/Y_i фрагмента главного ряда, входящего в унитарный радикал, каждой параболической максимальной подгруппы P_k , указанной в первом столбце. Третий столбец нашей таблицы содержит корни r для порождающих элементов $x_r(a)Y_i$ главного фактора $Y_{i+1}/Y_i = \prod_r X_r Y_i / Y_i$. Для каждого $i \geq 1$ главный фактор Y_{i+1}/Y_i изоморфен в аддитивной записи прямой сумме корневых подгрупп X_r и является неприводимым $GF(2^n)L_k$ -модулем. Старший вес и размерность этого модуля $\bigoplus_r X_r$ укажем в четвертом и пятом столбцах табл. 1 соответственно. Будем обозначать (в табл. 1) произвольный корень $c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 p_4$ из Φ через $c_1 c_2 c_3 c_4$ ($0 \leq c_i \in \mathbb{Z}$).

Таблица 1. Главные факторы параболических максимальных подгрупп в $F_4(2^n)$

P_k	Y_{i+1}/Y_i	корни r : $Y_{i+1}/Y_i = \prod_r X_r Y_i / Y_i \cong \bigoplus_r X_r$	вес	разм.
P_1	Y_3/Y_2	1000, 1100, 1120, 1220, 1122, 1222, 1242, 1342	1342	8
P_1	Y_2/Y_1	1110, 1111, 1121, 1221, 1231, 1232	1232	6
P_1	$Y_1/1$	2342	2342	1
P_2	Y_5/Y_4	0100, 1100, 0120, 1120, 0122, 1122	1122	6
P_2	Y_4/Y_3	0110, 1110, 0111, 1111, 0121, 1121	1121	6
P_2	Y_3/Y_2	1220, 1222, 1242	1242	3
P_2	Y_2/Y_1	1221, 1231, 1232	1232	3
P_2	$Y_1/1$	1342, 2342	2342	2
P_3	Y_5/Y_4	0010, 0011, 0110, 0111, 1110, 1111	1111	6
P_3	Y_4/Y_3	0120, 0122, 1120, 1122, 1220, 1222	1222	6
P_3	Y_3/Y_2	0121, 1121, 1221	1221	3
P_3	Y_2/Y_1	1242, 1342, 2342	2342	3
P_3	$Y_1/1$	1231, 1232	1232	2
P_4	Y_3/Y_2	0001, 0011, 0111, 0121, 1111, 1121, 1221, 1231	1231	8
P_4	Y_2/Y_1	0122, 1122, 1222, 1242, 1342, 2342	2342	6
P_4	$Y_1/1$	1232	1232	1

3. Доказательство теоремы 2 для $G = G_2(2^n)$

В группе $G_2(p^n)$ имеются с точностью до сопряжения две параболические максимальные подгруппы P_1 и P_2 . Приведем для каждой из них разложение

Леви:

$$P_1 = U_1 L_1 = \langle X_1, X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle \langle H, X_2, X_8 \rangle,$$

$$P_2 = U_2 L_2 = \langle X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle \langle H, X_1, X_7 \rangle.$$

При четной характеристике поля K имеем только три нетривиальных коммутаторных соотношения для корневых порождающих группы U_1 ($a, b \in K$):

$$[x_1(a), x_3(b)] = x_5(a^2 b) x_6(ab^2), \quad [x_1(a), x_4(b)] = x_5(ab), \quad [x_3(a), x_4(b)] = x_6(ab).$$

Группа $Y_1 = \langle X_5, X_6 \rangle$ является минимальной нормальной подгруппой в P_1 . Соотношения ($a, b \in K$)

$$[x_2(a), x_1(b)] Y_1 = x_3(ab) x_4(ab^2) Y_1, \quad [x_8(a), x_3(b)] Y_1 = x_1(ab) x_4(ab^2) Y_1$$

задают приводимое действие L_1 на фактор-группу U_1/Y_1 . Положим $Y_2 = \langle X_4, X_5, X_6 \rangle$. Тогда подгруппа Леви L_1 действует неприводимо на факторах U_1/Y_2 и Y_2/Y_1 . Получаем фрагмент $U_1 = Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1$ главного ряда группы P_1 .

Выпишем при четной характеристике поля K все нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых порождающих группы U_2 , вытекающие из коммутаторной формулы Шевалле ($a, b \in K$):

$$[x_2(a), x_5(b)] = x_6(ab), \quad [x_3(a), x_4(b)] = x_6(ab).$$

Группа $Y_1 = X_6$ является минимальной нормальной подгруппой в P_2 . Действие L_2 на группу U_2/Y_1 задается следующими коммутаторными соотношениями ($a, b \in K$):

$$[x_1(a), x_2(b)] Y_1 = x_3(ab) x_4(a^2 b) x_5(a^3 b) Y_1, \quad [x_1(a), x_3(b)] Y_1 = x_5(a^2 b) Y_1,$$

$$[x_7(a), x_5(b)] Y_1 = x_4(ab) x_3(a^2 b) x_2(a^3 b) Y_1, \quad [x_1(a), x_4(b)] Y_1 = x_5(ab) Y_1,$$

$$[x_7(a), x_4(b)] Y_1 = x_2(a^2 b) Y_1, \quad [x_7(a), x_3(b)] Y_1 = x_2(ab) Y_1,$$

поэтому это действие неприводимо на ней. Получаем фрагмент $U_2 = Y_2 > Y_1 > 1$ главного ряда группы P_2 .

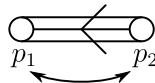
4. Доказательство теоремы 2 для $G = G_2(3^n)$

Если $p = 3$, то в U_1 только одно нетривиальное коммутаторное соотношение $[x_1(a), x_3(b)] = x_4(ab)$, ($a, b \in K$). Корневая подгруппа $Y_1 = X_4$ является минимальной нормальной подгруппой в P_1 . Коммутаторные соотношения ($a, b \in K$)

$$[x_2(a), x_1(b)] Y_1 = x_3(-ab) x_5(-ab^3) x_6(-a^2 b^3) Y_1, \quad [x_2(a), x_5(b)] Y_1 = x_6(-ab) Y_1,$$

$$[x_8(a), x_3(b)] Y_1 = x_1(-ab) x_6(-ab^3) x_5(-a^2 b^3) Y_1, \quad [x_8(a), x_6(b)] Y_1 = x_5(-ab) Y_1$$

задают приводимое действие L_1 на фактор-группу U_1/Y_1 . Положим $Y_2 = \langle X_4, X_5, X_6 \rangle$. Тогда подгруппа Леви L_1 действует неприводимо на фактор-группах U_1/Y_2 и Y_2/Y_1 . Получаем фрагмент $U_1 = Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1$ главного ряда группы P_1 . Существует подстановка $(1, 2)(3, 5)(4, 6)$ [6, лемма 12.3.2] множества положительных корней Φ^+ , индуцированная симметрией диаграммы Дынкина типа G_2



Соответствующий этой подстановке графовый автоморфизм группы $G_2(3^n)$ отображает параболическую максимальную подгруппу P_1 в параболическую максимальную подгруппу P_2 (см. [6, предложение 12.3.3]). Это позволяет выписать главные факторы и соответствующие главные ряды для P_2 , если характеристика поля равна 3. Теорема 2 доказана.

Занесем полученные при доказательстве теоремы 2 результаты в табл. 2 и 3.

Таблица 2. Главные факторы параболических максимальных подгрупп в $G_2(2^n)$

P_k	Y_{i+1}/Y_i	$r: Y_{i+1}/Y_i = \prod_r X_r Y_i/Y_i \cong \bigoplus_r X_r$	вес	разм.
P_1	Y_3/Y_2	$p_1, p_1 + p_2$	$p_1 + p_2$	2
P_1	Y_2/Y_1	$2p_1 + p_2$	$2p_1 + p_2$	1
P_1	$Y_1/1$	$3p_1 + p_2, 3p_1 + 2p_2$	$3p_1 + 2p_2$	2
P_2	Y_2/Y_1	$p_2, p_1 + p_2, 2p_1 + p_2, 3p_1 + p_2$	$3p_1 + p_2$	4
P_2	$Y_1/1$	$3p_1 + 2p_2$	$3p_1 + 2p_2$	1

Таблица 3. Главные факторы параболических максимальных подгрупп в $G_2(3^n)$

P_k	Y_{i+1}/Y_i	$r: Y_{i+1}/Y_i = \prod_r X_r Y_i/Y_i \cong \bigoplus_r X_r$	вес	разм.
P_1	Y_3/Y_2	$p_1, p_1 + p_2$	$p_1 + p_2$	2
P_1	Y_2/Y_1	$3p_1 + p_2, 3p_1 + 2p_2$	$3p_1 + 2p_2$	2
P_1	$Y_1/1$	$2p_1 + p_2$	$2p_1 + p_2$	1
P_2	Y_3/Y_2	$p_2, 3p_1 + p_2$	$3p_1 + p_2$	2
P_2	Y_2/Y_1	$p_1 + p_2, 2p_1 + p_2$	$2p_1 + p_2$	2
P_2	$Y_1/1$	$3p_1 + 2p_2$	$3p_1 + 2p_2$	1

ЛИТЕРАТУРА

1. Azad H., Barry M., Seitz G. On the structure of parabolic subgroups // Commun. Algebra. 1990. V. 18, N 2. P. 551–562.
2. Кораблева В. В. О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 764–782.
3. Кораблева В. В. О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы ${}^2E_6(q^2)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 230–237.
4. Кораблева В. В. О главных факторах параболических максимальных подгрупп скрученных классических групп // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 1100–1110.
5. Кораблева В. В. О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы ${}^3D_4(q^3)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 187–191.
6. Carter R. W. Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972.

Статья поступила 31 марта 2017 г.

Кораблева Вера Владимировна
Челябинский гос. университет,
лаборатория квантовой топологии,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
vvk@csu.ru