Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2017. Том 58, № 6

УДК 517.983 : 517.982.4 : 519.21

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ШУМЕ

И. В. Мельникова, М. А. Альшанский

Аннотация. Стохастическое дифференциально-операторное уравнение с мультипликативным шумом изучается в пространстве гильбертово-значных обобщенных случайных величин. Существование и единственность решения задачи Коши доказаны для случая неограниченного операторного коэффициента при белом шуме. В качестве примера рассмотрено уравнение популяционной динамики со стохастически возмущенным оператором умножения.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.614

Ключевые слова: стохастическое дифференциально-операторное уравнение, белый шум, обобщенные случайные величины, S-преобразование, произведение Уика, интеграл Хицуды — Скорохода.

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения в бесконечномерных гильбертовых пространствах привлекают внимание многих исследователей, так как часто возникают в качестве математических моделей в физике, финансовой математике, математической биологии и других областях. Первые работы по этой тематике относятся к 80-м гг. прошлого века [1, 2]. Они представляют собой обобщение на бесконечномерный случай теории стохастических дифференциальных уравнений Ито. Обзор дальнейшего развития теории и более поздние результаты можно найти в монографиях [3–5]. В рамках этой теории, в частности, было исследовано линейное дифференциальное уравнение Ито с мультипликативным шумом

$$dX(t) = AX(t)\,dt + B(X(t))\,dW(t), \quad X(0) = \zeta, \tag{1}$$

где W — винеровский процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, A — оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а $B(\cdot)$ — линейный оператор, определенный на H, со значениями в пространстве операторов из $\mathbb{H}$ в H.

Стандартным требованием для получения результатов о существовании и единственности решений задачи (1) в рамках бесконечномерного обобщения

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

теории уравнений Ито является порождение оператором A полугруппы операторов $\{U(t) \mid t \geq 0\}$ класса C_0. Это условие гарантирует корректность задачи Коши для детерминированного, невозмущенного, однородного уравнения $X'(t) = AX(t)$. Условия, накладываемые на оператор $B(\cdot)$, тесно связаны со свойствами винеровского процесса W, и здесь возможны две принципиально разные ситуации. Первая характеризуется тем, что $W(t) \in L^2(\Omega; H)$ для любого t. Это эквивалентно тому, что ковариационный оператор $\operatorname{Cov}(W(t)) = tQ$ является оператором с конечным следом. В этом случае W называют *Q-винеровским процессом.* Если W Q-винеровский, то для $B(\cdot)$ достаточно быть ограниченным оператором из H в $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$ — пространство операторов Гильберта — Шмидта, действующих из $\mathbb{H}_Q$ в H, где $\mathbb{H}_Q = Q^{1/2}(\mathbb{H})$ с нормой $\|x\|_Q := \|Q^{-1/2}x\|_{\mathbb{H}}$. В силу свойств оператора Q пространство $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$ оказывается достаточно широким. Оно содержит все ограниченные операторы из $\mathbb{H}$ в H, при этом среди его элементов есть и неограниченные операторы. Вторая ситуация имеет место, когда в качестве W используется так называемый цилиндрический винеровский процесс. Для него $\operatorname{Cov}(W(t)) = tI$, где I — тождественный оператор в H. В этом случае требования на $B(\cdot)$ ужесточаются — он должен быть уже ограниченным из H в $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H)$, т. е.

$$B(\cdot) \in \mathscr{L}(H, \mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H)). \tag{2}$$

Необходимо отметить, что то, какой именно — цилиндрический или Q-винеровский процесс — используется в уравнении (1), определяется требованиями модели, точнее, свойствами стохастического воздействия на моделируемую систему. В случае, когда $\mathbb{H}$ и H являются гильбертовыми пространствами функций действительных переменных (наиболее распространенная ситуация в приложениях), цилиндрический винеровский процесс и его приращения обладают свойствами белого шума по этим переменным. Соответствующие свойства Q-винеровского процесса определяются интегрируемым с квадратом ядром его ковариационного оператора, а значит, Q-винеровский процесс в уравнении (1) может использоваться только тогда, когда стохастическое возмущение не является белошумным по пространственным переменным.

Если требования модели заставляют использовать цилиндрический винеровский процесс в уравнении (1), условие (2) может оказаться слишком ограничительным. Например, во многих приложениях возникает оператор $B(\cdot)$, ставящий в соответствие элементу $X \in H = \mathbb{H} = L^2[0;1]$ оператор $B(X)$ умножения на X — функцию пространственной переменной (см. пример в § 4). Для произвольной функции $X \in H$ такой оператор $B(X)$ не удовлетворяет условию (2). Более того, он, вообще говоря, не является ограниченным из $\mathbb{H}$ в H.

Ослабить условие (2) на оператор $B(\cdot)$ в уравнении с цилиндрическим винеровским процессом можно, если решать задачу в пространствах абстрактных, т. е. гильбертово-значных, обобщенных случайных величин $(\mathscr{S})_{-\rho}(H)$. В этих пространствах вместо, по сути, интегрального уравнения Ито (1) получаем следующую задачу Коши для дифференциального уравнения:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B(X(t)) \diamond \mathbb{W}(t), \quad X(0) = \zeta, \tag{3}$$

где $\mathbb{W}(t) \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ — цилиндрический белый шум, а символом $\diamond$ обозначено произведение Уика. Записать задачу в форме (3) можно благодаря равенству

$$\int_0^T \Psi(t)\, dW(t) = \int_0^T \Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)\, dt, \tag{4}$$

доказанному для бесконечномерного случая в [6], которое выполняется при определенных условиях на $\Psi(t)$ (см. теорему 1). Интеграл в правой части этого равенства называют *интегралом Хицуды — Скорохода.* Равенство (4) означает, что интеграл Хицуды — Скорохода является обобщением интеграла Ито.

Пространства $(\mathscr{S})_{-\rho}(H)$ введены в [7, 8] как обобщения на гильбертово-значный случай пространств Кондратьева, введенных в [9] для $\mathbb{R}^n$-значного случая. Для их определения в качестве пространств основных функций использовались пространства H-значных функций $(\mathscr{S})_\rho(H)$. В результате в $(\mathscr{S})_{-\rho}(H)$ было исследовано только уравнение с аддитивным шумом. В [10, 11] уравнение с мультипликативным шумом изучено с помощью преобразования Эрмита. Результат о существовании и единственности решения со значениями в пространстве $(\mathscr{S})_{-1}(H)$ был получен при дополнительном условии на коммутаторы оператора A с операторами $B(\cdot)x : y \in H \mapsto B(y)x$, $x \in H$. В [12] пространства $(\mathscr{S})_{-\rho}(H)$ определены с помощью пространств вещественнозначных основных функций $(\mathscr{S})_\rho$. Это позволило более естественно определить в пространстве $(\mathscr{S})_{-\rho}(H)$ S-преобразование и при том же дополнительном условии получить решение со значениями в пространстве $(\mathscr{S})_{-0}(H)$.

В настоящей работе результат о существовании и единственности решения задачи (3) удалось получить без дополнительных условий на операторы A и $B(\cdot)$, что позволяет охватить важные для приложений классы операторов.

В § 1 приведены определения основных понятий, необходимых для постановки задачи в пространствах абстрактных случайных величин. В § 2 дана постановка задачи в этих пространствах. Особую роль здесь играет предложение 2, где даны условия на вспомогательный оператор Q, который, с одной стороны, должен быть оператором следа (это условие на скорость убывания его собственных значений), с другой стороны, требуется, чтобы его собственные значения не убывали слишком быстро. Этот оператор играет важную роль в описании класса операторов $B(\cdot)$, для которых получена теорема существования и единственности решения задачи (3). В § 3 содержится основной результат работы — теорема 3. Этот результат был анонсирован в [13]. В настоящей работе приведено подробное доказательство теоремы. Оно использует технику S-преобразования, состоящую в сведении исходной задачи к задаче Коши для детерминированного дифференциально-операторного уравнения, точнее, к семейству детерминированных задач Коши, параметризованному с помощью параметра $\theta \in \mathscr{S}$, где $\mathscr{S}$ — пространство Шварца быстро убывающих пробных функций. В § 4 приведен пример уравнения с оператором $B(\cdot)$, для которого выполнены условия теоремы 2 при том, что оператор $B(X)$ является, вообще говоря, неограниченным.

§ 1. Предварительные сведения

Будем использовать вероятностное пространство белого шума $(\mathscr{S}', \mathscr{B}(\mathscr{S}'), \mu)$, где $\mathscr{S}'$ — пространство медленно растущих распределений Шварца над пространством $\mathscr{S}$ быстро убывающих пробных функций, $\mathscr{B}(\mathscr{S}')$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathscr{S}'$, а μ — нормализованная гауссовская вероятностная мера на $\mathscr{B}(\mathscr{S}')$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\mathscr{S}'} e^{i\langle\theta,\omega\rangle}\,\mu(d\omega) = e^{-\frac{|\theta|_0^2}{2}}, \quad \theta \in \mathscr{S}.$$

Здесь $|\cdot|_0$ — норма в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Существование такой меры утверждает теорема Бохнера — Минлоса (см. [14–17]).

Нам понадобятся пространства пробных (основных) и обобщенных случайных величин Кондратьева. Они определяются следующим образом. Пусть (L^2) — пространство случайных величин на вероятностном пространстве белого шума, интегрируемых с квадратом по мере μ. Известно (см., например, [17]), что семейство стохастических полиномов Эрмита образует ортогональный базис в (L^2). Стохастические полиномы Эрмита определяются равенствами

$$\mathbf{h}_\alpha(\omega) = \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(\langle \xi_i, \omega\rangle), \quad \omega \in \mathscr{S}',$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ — финитный мультииндекс (совокупность всех таких мультииндексов будем обозначать через $\mathscr{T}$),

$$h_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\xi_k(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{(k-1)!}} e^{-\frac{x^2}{4}} h_{k-1}(x)$$

— полиномы Эрмита и функции Эрмита. Обозначим через $(\mathscr{S}_p)_\rho$, где $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\rho \in [0;1]$, подпространство всех случайных величин $\varphi \in (L^2)$, раскладывающихся в этом пространстве в ряд Фурье

$$\varphi = \sum_{\alpha \in \mathscr{T}} \varphi_\alpha \mathbf{h}_\alpha,$$

так что для любого $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\|\varphi\|^2_{p,\rho} = (\varphi, \varphi)_{p,\rho} := \sum_{\alpha \in \mathscr{T}} (\alpha!)^{1+\rho} |\varphi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{2p\alpha} < \infty.$$

Пространство $(\mathscr{S})_\rho := \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} (\mathscr{S}_p)_\rho$, оснащенное топологией проективного предела, называют *пространством пробных случайных величин Кондратьева.* Сопряженное к нему пространство $(\mathscr{S})_{-\rho} := \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} (\mathscr{S}_{-p})_{-\rho}$, оснащенное топологией индуктивного предела, называют *пространством обобщенных случайных величин Кондратьева.* Здесь $(\mathscr{S}_{-p})_{-\rho}$ — пространство, сопряженное к $(\mathscr{S}_p)_\rho$, элементы которого можно отождествить с формальными разложениями

$$\Phi = \sum_{\alpha \in \mathscr{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha,$$

удовлетворяющими условию

$$\|\Phi\|^2_{-p,-\rho} = (\Phi, \Phi)_{-p,-\rho} := \sum_{\alpha \in \mathscr{T}} (\alpha!)^{1-\rho} |\Phi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty$$

для некоторого $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При этом для любых $\Phi \in (\mathscr{S})_{-\rho}$ и $\varphi \in (\mathscr{S})_\rho$ действие Φ на φ выражается равенством

$$\langle \varphi, \Phi \rangle = \sum_{\alpha \in \mathscr{T}} \alpha! \varphi_\alpha \overline{\Phi}_\alpha.$$

Пусть $\mathbb{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ и $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{H}$. Через $(L^2)(\mathbb{H})$ обозначим пространство функций $f : \mathscr{S}' \to \mathbb{H}$, интегрируемых по Бохнеру с квадратом по мере μ. Семейство $\{\mathbf{h}_\alpha e_j\}_{\alpha\in\mathscr{T},\, j\in\mathbb{N}}$ образует ортогональный базис этого пространства. Обозначим через $(\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ пространство всех линейных непрерывных операторов $\Phi : (\mathscr{S})_\rho \to \mathbb{H}$, оснащенное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(\mathscr{S})_\rho$. Будем называть его элементы *абстрактными* ($\mathbb{H}$-*значными*) *обобщенными случайными величинами над пространством* $(\mathscr{S})_\rho$. Действие $\Phi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ на $\varphi \in (\mathscr{S})_\rho$ будем обозначать через $\Phi[\varphi]$.

Пользуясь тем, что $(\mathscr{S})_\rho$ — счетно-гильбертово ядерное пространство, можно доказать (см. [12]), что введенное пространство $(\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ совпадает с $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} (\mathscr{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$, где $(\mathscr{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ — пространство операторов Гильберта — Шмидта, действующих из $(\mathscr{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$. Для $\Phi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ имеем

$$\Phi[\cdot] = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle \cdot, \Phi_j\rangle e_j = \sum_{\alpha\in\mathscr{T}, j\in\mathbb{N}} \Phi_{\alpha,j}(\mathbf{h}_\alpha e_j) = \sum_{\alpha\in\mathscr{T}} \Phi_\alpha(\cdot, \mathbf{h}_\alpha)_{(L^2)},$$

где $\langle \cdot, \Phi_j\rangle = (\Phi[\cdot], e_j) \in (\mathscr{S}_{-p})_{-\rho}$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, $\Phi_\alpha = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \Phi_{\alpha,j} e_j \in \mathbb{H}$. При этом для нормы в $(\mathscr{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ справедливы равенства

$$\|\Phi\|^2_{-p,-\rho} = \sum_{\alpha\in\mathscr{T}, j\in\mathbb{N}} (\alpha!)^{1-\rho} |\Phi_{\alpha,j}|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathscr{T}} (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha\|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha},$$

а топология пространства $(\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ совпадает с топологией индуктивного предела, порожденной совокупностью норм $\|\cdot\|_{-p,-\rho}$, $p \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{H}$-значный случайный процесс, определенный формальным рядом

$$W(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j(t) e_j,$$

где $\{\beta_j(t)\}$ — последовательность независимых броуновских движений, называется $\mathbb{H}$-*значным цилиндрическим винеровским процессом.* Легко убедиться в том, что $W(t) \notin (L^2)(\mathbb{H})$ для всех $t \geq 0$. В то же время имеем $E(W(t), x)^2 = t\|x\|^2$ для любого $x \in \mathbb{H}$, т. е. $(W(t), x) \in (L^2)$.

Построить последовательность независимых броуновских движений на вероятностном пространстве белого шума можно следующим образом. Пусть $n(\cdot,\cdot) : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция, удовлетворяющая условию

$$n(i,j) \geq ij, \quad i,j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Положим $1^j_{[a,b]} := \mathfrak{J}_j 1_{[a,b]}$, где $\mathfrak{J}_j f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (f, \xi_i)\xi_{n(i,j)}$ для $f \in L^2(\mathbb{R})$, и введем при $t \geq 0$ гауссовские случайные процессы

$$\beta_j(t) := \langle 1^j_{[0,t]}, \cdot\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s)\, ds \xi_{n(i,j)}, \cdot \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s)\, ds \mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}},$$

где $\epsilon_n := (0, 0, \dots, \underset{n}{1}, 0, \dots)$. Пользуясь тем, что коэффициенты Фурье функции $1^j_{[0,t]}$ определяются через коэффициенты Фурье функции $1_{[0,t]}$, получаем

$$\operatorname{Cov}(\beta_j(t), \beta_j(s)) = (1_{[0,t]}, 1_{[0,s]})_{L^2(\mathbb{R})} = \min\{t, s\},$$

а значит, $\beta_j(t)$ — броуновские движения. В силу того, что функции $1^{j_1}_{[0;t]}$ и $1^{j_2}_{[0;s]}$ для любых $t, s \geq 0$ ортогональны в $L^2(\mathbb{R})$ при $j_1 \neq j_2$, эти броуновские движения независимы. В результате получаем разложение

$$W(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} W_{\epsilon_n}(t)\mathbf{h}_{\epsilon_n}, \quad W_{\epsilon_n}(t) = \int_0^t \xi_{i(n)}(s)\, ds e_{j(n)}, \tag{6}$$

где $i(n), j(n) \in \mathbb{N}$ таковы, что $n(i(n), j(n)) = n$. При этом $W(t) \in (\mathscr{S}_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subset (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для любого $\rho \in [0; 1]$.

Определим $\mathbb{H}$-значный цилиндрический белый шум равенством, которое получается формальным дифференцированием равенства (6):

$$\mathbb{W}(t) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t)\mathbf{h}_{\epsilon_n}, \quad \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t) = \xi_{i(n)}(t)\, e_{j(n)} \in \mathbb{H}. \tag{7}$$

При каждом t имеем $\mathbb{W}(t) \in (\mathscr{S}_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subset (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $\rho \in [0; 1]$.

Определяя дифференцируемость функций $\Phi : \mathbb{R} \to (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ в смысле введенной топологии и пользуясь известными оценками функций Эрмита, можно доказать, что $\mathbb{H}$-значные винеровский процесс и белый шум бесконечно дифференцируемы и $W'(t) = \mathbb{W}(t)$.

Будем называть функцию $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *интегрируемой на измеримом множестве* $G \subset \mathbb{R}$, если существует такое $p \in \mathbb{N}$, что Φ интегрируема по Бохнеру на G как функция со значениями в гильбертовом пространстве $(\mathscr{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

S-*преобразование* элементов пространства $(\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $\rho \in [0; 1)$, определяется равенством

$$(\mathrm{S}\Phi)(\theta) := \Phi[\mathscr{E}_\theta], \theta \in \mathscr{S}, \quad \text{где } \mathscr{E}_\theta(\cdot) = e^{\langle \cdot, \theta\rangle - \frac{1}{2}|\theta|_0^2}$$

(функцию $\mathscr{E}_\theta$ называют *ренормализованной экспонентой*). Это определение корректно, так как $\mathscr{E}_\theta \in (\mathscr{S})_\rho$ при $\rho \in [0; 1)$ для любого $\theta \in \mathscr{S}$ (см., например, [17, лемма 2.7.4]). При этом для любого $p \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|\mathscr{E}_\theta|_{p,\rho} \leq 2^{\rho/2} \exp[(1-\rho)^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}} |\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}] \tag{8}$$

(см., например, [16]). Отметим, что для ренормализованной экспоненты имеет место следующее разложение в ряд Фурье по стохастическим полиномам Эрмита:

$$\mathscr{E}_\theta = \sum_{\alpha\in\mathscr{T}} \mathscr{E}_{\theta,\alpha}\mathbf{h}_\alpha, \quad \mathscr{E}_{\theta,\alpha} = \frac{(\theta,\xi)^\alpha}{\alpha!} := \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(\theta,\xi_i)^{\alpha_i}}{\alpha_i!}.$$

Заметим, что если $\Phi \in (L^2)(\mathbb{H})$, то

$$(\mathrm{S}\Phi)(\theta) = \int_{\mathscr{S}'} \Phi(\omega)\mathscr{E}_\theta(\omega)\, d\mu(\omega) = E(\Phi\mathscr{E}_\theta), \quad \theta \in L^2(\mathbb{R}).$$

Поскольку линейная оболочка множества $\{\mathscr{E}_\theta, \theta \in \mathscr{S}\}$ всюду плотна в $(\mathscr{S})_\rho$, $\rho \in [0; 1)$ (см., например, [16]), равенство $(\mathrm{S}\Phi)(\theta) = 0$ для всех $\theta \in \mathscr{S}$ влечет за собой $\Phi = 0$. Таким образом, каждый элемент пространства $(\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, где $\rho \in [0; 1)$, однозначно определяется своим S-преобразованием.

Пример. Для S-преобразования $\mathbb{H}$-значного цилиндрического белого шума имеем

$$[\mathrm{S}\mathbb{W}(t)](\theta) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t) e_j(\xi_{n(i,j)}, \theta)_0, \quad \|[\mathrm{S}\mathbb{W}(\cdot)](\theta)\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = |\theta|_0^2.$$

Следующая характеристическая теорема является очевидным обобщением теоремы 8.2 из [16] на $\mathbb{H}$-значный случай.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $\rho \in [0;1)$. *Тогда функция* $F = \mathrm{S}\Phi$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *для любых* $\theta, \eta \in \mathscr{S}$ *функция* $F(\theta + z\eta)$ *является* $\mathbb{H}$*-значной целой аналитической функцией от* $z \in \mathbb{C}$;

(ii) $\exists K > 0, a > 0,\ p \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathscr{S} : \|F(\theta)\| \le K \exp\left[a|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right]$.

Обратно, если функция $F : \mathscr{S} \to \mathbb{H}$ *удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii), *то существует единственная* $\Phi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, *для которой* $F = \mathrm{S}\Phi$. *При этом для любого* q *такого, что* $e^2\left(\frac{2a}{1-\rho}\right)^{1-\rho}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(2i)^{-2(q-p)} < 1$, *верно неравенство*

$$\|\Phi\|_{-q,-\rho} \le K\left(1 - e^2\left(\frac{2a}{1-\rho}\right)^{1-\rho}\sum_{i=1}^{\infty}(2i)^{-2(q-p)}\right)^{-1/2}.$$

Пусть $\Phi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $\Psi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H))$, где H — еще одно сепарабельное гильбертово пространство, а $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H)$ — пространство операторов Гильберта — Шмидта из $\mathbb{H}$ в H. Поскольку $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H)$ сепарабельно, пространство обобщенных случайных величин $(\mathscr{S})_{-\rho}(\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H))$ определено корректно. По определению S-преобразования имеем $\mathrm{S}\Psi(\theta) \in \mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H)$ и $\mathrm{S}\Phi(\theta) \in \mathbb{H}$ для любого $\theta \in \mathscr{S}$. С помощью теоремы 1 нетрудно доказать, что $\mathrm{S}\Psi(\theta)\mathrm{S}\Phi(\theta)$ является S-преобразованием некоторой обобщенной случайной величины $\Theta \in (\mathscr{S})_{-\rho}(H)$. Будем называть Θ *произведением Уика* Ψ и Φ и обозначать через $\Psi \diamond \Phi$. Таким образом, для любых $\Phi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ и $\Psi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H))$ имеет место равенство

$$\mathrm{S}(\Psi \diamond \Phi) = \mathrm{S}\Psi\mathrm{S}\Phi.$$

Можно показать, что если $\Psi = \sum\limits_{\alpha\in\mathscr{T}} \Psi_\alpha \mathbf{h}_\alpha$, где $\Psi_\alpha \in \mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H)$, и $\Phi = \sum\limits_{\alpha\in\mathscr{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha$, где $\Phi_\alpha \in \mathbb{H}$, то справедливо равенство

$$\Psi \diamond \Phi = \sum_{\gamma\in\mathscr{T}}\Big(\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\Psi_\alpha\Phi_\beta\Big)\mathbf{h}_\gamma.$$

Отсюда вытекает следующее важное утверждение.

Предложение 1. *Если один из множителей* $\Psi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H))$ *или* $\Phi \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *детерминированный, то* $\Psi \diamond \Phi = \Psi\Phi$.

§ 2. Постановка задачи

Для рассмотрения дифференциально-операторных уравнений в пространствах обобщенных гильбертово-значных случайных величин определим для любого оператора $A \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$, где H_1 и H_2 — сепарабельные гильбертовы пространства, действие этого оператора на $\Phi = \sum\limits_{\alpha\in\mathscr{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathscr{S})_{-\rho}(H_1)$ следующим образом:

$$A\Phi := \sum_{\alpha\in\mathscr{T}} A\Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha. \tag{9}$$

При таком определении A оказывается определенным на всем пространстве $(\mathscr{S})_{-\rho}(H_1)$ и ограниченным как оператор, действующий из $(\mathscr{S}_{-p})_{-\rho}(H_1)$ в $(\mathscr{S}_{-p})_{-\rho}(H_2)$, для любого $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Если A — линейный, вообще говоря, неограниченный замкнутый оператор в H с областью определения $\operatorname{dom} A \subset H$, то через $(\operatorname{dom} A)$ обозначим совокупность всех $\Phi = \sum\limits_{\alpha\in\mathscr{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathscr{S})_{-\rho}(H)$ таких, что $\Phi_\alpha \in \operatorname{dom} A$ для всех $\alpha \in \mathscr{T}$ и для некоторого $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено условие

$$\sum_{\alpha \in \mathscr{T}} (\alpha!)^{1-\rho} \|A\Phi_\alpha\|^2 (2\mathbb{N})^{-2q\alpha} < \infty. \tag{10}$$

Для $\Phi \in (\operatorname{dom} A)$ определим $A\Phi$ равенством (9).

Для того чтобы слагаемое $B\big(X(t)\big) \diamond \mathbb{W}(t)$ в уравнении (3) было корректно определено для максимально широкого класса операторов $B(\cdot)$, в частности для $B(\cdot)$, значения которых являются неограниченными операторами из $\mathbb{H}$ в H, потребуем, чтобы $B(\cdot) \in \mathscr{L}(H; \mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q; H))$, где $\mathbb{H}_Q$ — вспомогательное пространство $\mathbb{H}_Q := Q^{\frac{1}{2}}(\mathbb{H})$, оснащенное скалярным произведением $(u, v)_{\mathbb{H}_Q} = (Q^{-\frac{1}{2}} u, Q^{-\frac{1}{2}} v)_{\mathbb{H}}$, где Q — положительный ядерный оператор, действующий в $\mathbb{H}$ и определенный равенством

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 (e_j \otimes e_j), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty. \tag{11}$$

В результате условие на $B(\cdot)$ ослаблено по сравнению с условием (2) в силу вложений

$$\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; H) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{H}; H) \subseteq \mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q; H).$$

При этом $B(X(t)) \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q; H))$ для $X(t) \in (\mathscr{S})_{-\rho}(H)$ и, чтобы произведение Уика $B(X(t)) \diamond \mathbb{W}(t)$ было определено, необходимо, чтобы $\mathbb{W}(t) \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H}_Q)$. Таким образом, ослабление условий на $B(\cdot)$ с помощью оператора Q приводит к требованию, чтобы значения белого шума принадлежали более узкому пространству $(\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H}_Q) \subseteq (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Для того чтобы это требование выполнялось, пространство $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$ не должно быть слишком широким. Следующее предложение дает ограничение на скорость стремления к нулю собственных значений оператора Q, при котором для любого случайного процесса $\Psi(t) \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q; H))$ произведение Уика $\Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)$ определено для всех t и принадлежит пространству $(\mathscr{S})_{-\rho}(H)$.

Предложение 2. *Если для некоторого $p_* \in \mathbb{N}$ выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-2} j^{-2p_*} < \infty, \tag{12}$$

то $\mathbb{W}(t) \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathbb{H}_Q)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, $\rho \in [0; 1)$.

Доказательство. Для коэффициентов разложения (7), пользуясь известной оценкой функций Эрмита $|\xi_i(t)| = O(i^{-1/4})$ и условием (5), получаем

$$\|\mathbb{W}_{\epsilon_{n(i,j)}}\|^2_{\mathbb{H}_Q} (2\mathbb{N})^{-2p_* \epsilon_{n(i,j)}} = |\xi_i(t)|^2 \sigma_j^{-2} (2n(i,j))^{-2p_*}$$
$$\leq \frac{|\xi_i(t)|^2}{\sigma_j^2 (2ij)^{2p_*}} = O\big(\sigma_j^{-2} i^{-2p_* - \frac{1}{2}} j^{-2p_*}\big). \quad \square$$

Вышеизложенное позволяет ввести следующее понятие.

Определение 1. Будем называть обобщенный случайный процесс $\Psi(t) \in (\mathscr{S})_{-\rho}(\mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q; H))$ *интегрируемым по Хицуда — Скороходу* по $\mathbb{H}$-значному цилиндрическому белому шуму $\mathbb{W}(t)$ на $[0; T]$, если $\Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)$ интегрируема на $[0; T]$ как $(\mathscr{S})_{-\rho}(H)$-значная функция. Интеграл $\int_0^T \Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)\, dt$ будем называть *интегралом Хицуды — Скорохода* от $\Psi(t)$.

Определенный таким образом интеграл является обобщением интеграла Ито по цилиндрическому винеровскому процессу, а именно, справедлива

Теорема 2 [6]. *Для любого предсказуемого $\mathscr{L}_2(\mathbb{H};H)$-значного процесса такого, что* $E\left[\int\limits_0^T \|\Psi(t)\|^2_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H};H)}\,dt\right] < \infty$, *верно равенство*

$$\int\limits_0^T \Psi(t)\,dW(t) = \int\limits_0^T \Psi(t)\diamond \mathbb{W}(t)\,dt.$$

Пользуясь этой теоремой, заменим в интегральном уравнении Ито

$$X(t) = \zeta + \int\limits_0^t AX(s)\,ds + \int\limits_0^t B(X(s))\,dW(s),$$

соответствующем дифференциальному уравнению (1), интеграл Ито интегралом Хицуды — Скорохода. Дифференцируя по t, получаем задачу Коши (3) в пространстве $(\mathscr{S})_{-0}(H)$:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B(X(t))\diamond \mathbb{W}(t), \quad X(0) = \zeta.$$

Будем предполагать, что операторы A и B удовлетворяют следующим условиям:

(I) A — генератор полугруппы $\{U(t), t \geq 0\}$ класса C_0 в H;

(II) $B(\cdot) \in \mathscr{L}(H, \mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q, H))$, где Q — некоторый положительный ядерный оператор вида (11), удовлетворяющий условию (12).

Решением задачи (3) будем называть функцию $X : [0;\infty) \to (\mathscr{S})_{-\rho}(H)$, дифференцируемую в смысле топологии пространства $(\mathscr{S})_{-\rho}(H)$, принимающую значения из $(\operatorname{dom} A)$ и удовлетворяющую (3) при всех $t \in [0;\infty)$.

§ 3. Основной результат

Теорема 3. *Если выполнены условия* (I), (II), *то задача Коши* (3) *имеет единственное решение* $X : [0;\infty) \to (\mathscr{S})_{-0}(H)$ *для любого* $\zeta \in (\operatorname{dom} A) \subseteq (\mathscr{S})_{-0}(H)$.

Предпошлем доказательству теоремы несколько вспомогательных утверждений. В их доказательствах будем использовать следующие оценки коэффициентов Фурье по функциям Эрмита элементов $\theta \in \mathscr{S}$:

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |(\theta, \xi_i)| \leq \frac{|\theta|_p}{(2i)^p}. \tag{13}$$

Они вытекают из того, что для любого $p \in \mathbb{N}$ имеем $\sum\limits_i (\theta, \xi_i)^2 (2i)^{2p} < \infty$.

Лемма 1. *Для всех* $\rho \in [0;1)$, $p > 1$, $v \in \mathbb{R}_+$

$$A_{\rho,p}(v) := \sum_{\alpha \in \mathscr{T}} \frac{v^{|\alpha|}}{(\alpha!)^{1-\rho}} (2\mathbb{N})^{-(p\alpha)} < \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Index}\alpha = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i \neq 0\}$. Запишем ряд (14) в виде $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k$, где

$$a_k = \sum_{\operatorname{Index}\alpha = k} \frac{v^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}}{(\alpha!)^{1-\rho}} (2\mathbb{N})^{-(p\alpha)} = \sum_{\substack{0\leq\alpha_1<\infty,\\ \dots,\\ 0\leq\alpha_{k-1}<\infty,\\ 1\leq\alpha_k<\infty}} \prod_{i=1}^k \frac{v^{\alpha_i}}{(\alpha_i!)^{1-\rho}} (2i)^{-p\alpha_i}.$$

Имеем

$$a_k = \left[\prod_{i=1}^{k-1} \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \frac{(v/(2i)^p)^{\alpha_i}}{(\alpha_i!)^{1-\rho}}\right] \sum_{\alpha_k=1}^{\infty} \frac{(v/(2k)^p)^{\alpha_k}}{(\alpha_k!)^{1-\rho}}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{k-1} \psi\left(\frac{v}{(2i)^p}\right)\right]\left(\psi\left(\frac{v}{(2k)^p}\right) - \psi(0)\right),$$

где $\psi(z)$ — целая аналитическая функция, определенная рядом

$$\psi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^{1-\rho}}.$$

Используя асимптотическую оценку $\psi(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2^{1-\rho}} + o(z^2)$, $z \to 0$, получаем

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = k\left(\frac{\frac{v}{2^p}\left(\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p}\right) + O\left(\frac{1}{k^{2p}}\right)}{\frac{v}{(2(k+1))^p} + O\left(\frac{1}{k^{2p}}\right)}\right) = k\left(\frac{\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^p - 1\right) + O\left(\frac{1}{k^p}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{k^p}\right)}\right)$$

$$= k\left(\frac{\frac{p}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)}{1 + o(1)}\right) \underset{k\to\infty}{\to} p > 1.$$

В силу признака Раабе отсюда следует сходимость ряда. □

Лемма 2. *Если* $\zeta \in (\operatorname{dom} A) \subset (\mathscr{S})_{-\rho}(H)$, *то* $\hat{\zeta}(\theta) := \mathrm{S}\zeta(\theta) \in \operatorname{dom} A \subset H$ *для любого* $\theta \in \mathscr{S}$.

Доказательство. Пусть $\zeta = \sum\limits_{\alpha\in\mathscr{T}} \zeta_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\operatorname{dom} A)$, т. е. $\zeta_\alpha \in \operatorname{dom} A$ для всех $\alpha \in \mathscr{T}$ и оценка (10) выполнена для некоторого q. Имеем

$$\hat{\zeta} = \zeta[\mathscr{E}_\theta] = \sum_{\alpha\in\mathscr{T}} \alpha!\zeta_\alpha \mathscr{E}_{\theta,\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathscr{T}} \zeta_\alpha(\theta,\xi)^\alpha.$$

Рассмотрим конечные суммы

$$\hat{\zeta}^{(n,k)} = \sum_{\substack{\operatorname{Index}\alpha\le n,\\ |\alpha|\le k}} \zeta_\alpha(\theta,\xi)^\alpha,$$

которые принадлежат $\operatorname{dom} A$ при всех n и k. Пусть $p > q$, тогда, используя оценку (13), неравенство Гёльдера и равенство (14) леммы 1, получаем

$$\|A\hat{\zeta}^{(n,k)}(\theta) - A\hat{\zeta}^{(n,l)}(\theta)\| = \Bigg\|\sum_{\substack{\operatorname{Index}\alpha\le n,\\ k<|\alpha|\le l}} A\zeta_\alpha(\theta,\xi)^\alpha\Bigg\| \le \sum_{\substack{\operatorname{Index}\alpha\le n,\\ k<|\alpha|\le l}} \|A\zeta_\alpha\||(\theta,\xi)^\alpha|$$

$$\le \sum_{\substack{\operatorname{Index}\alpha\le n,\\ k<|\alpha|\le l}} \|A\zeta_\alpha\| \prod_i \frac{|\theta|_p^{\alpha_i}}{(2i)^{p\alpha_i}} = \sum_{\substack{\operatorname{Index}\alpha\le n,\\ k<|\alpha|\le l}} \|A\zeta_\alpha\|(2\mathbb{N})^{-p\alpha}|\theta|_p^{|\alpha|}$$

$$= \sum_{\substack{\operatorname{Index}\alpha\le n,\\ k<|\alpha|\le l}} (\alpha!)^{\frac{1-\rho}{2}}\|A\zeta_\alpha\|(2\mathbb{N})^{-q\alpha}\frac{|\theta|_p^{|\alpha|}(2\mathbb{N})^{-(p-q)\alpha}}{(\alpha!)^{\frac{1-\rho}{2}}}$$

$$\le \Bigg(\sum_{\substack{\operatorname{Index}\alpha\le n,\\ k<|\alpha|\le l}} (\alpha!)^{1-\rho}\|A\zeta_\alpha\|^2(2\mathbb{N})^{-2q\alpha}\Bigg)^{\frac{1}{2}} \cdot A_{\rho,2(p-q)}\big(|\theta|_p^2\big).$$

Из этой оценки и неравенства (10) вытекает фундаментальность последовательности $\{A\hat{\zeta}^{(n,k)}(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве H для любого n. Стало быть, в H существует ее предел, а в силу замкнутости оператора A

$$\hat{\zeta}^{(n)}(\theta) = \lim_{k\to\infty} \hat{\zeta}^{(n,k)}(\theta) \in \operatorname{dom} A, \quad A\hat{\zeta}^{(n)}(\theta) = \lim_{k\to\infty} A\hat{\zeta}^{(n,k)}(\theta).$$

Аналогично имеем

$$\|A\hat{\zeta}^{(n)}(\theta) - A\hat{\zeta}^{(n)}(\theta)\| \le \Big(\sum_{n<\operatorname{Index}\alpha\le m} (\alpha!)^{1-\rho}\|A\zeta_\alpha\|^2(2\mathbb{N})^{-2q\alpha}\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot A_{\rho,2(p-q)}\big(|\theta|_p^2\big),$$

откуда следует, что в H существует $\lim\limits_{n\to\infty} A\hat{\zeta}^{(n)}(\theta)$,

$$\hat{\zeta}(\theta) = \lim_{n\to\infty} \hat{\zeta}^{(n)}(\theta) \in \operatorname{dom} A, \quad A\hat{\zeta}(\theta) = \lim_{n\to\infty} A\hat{\zeta}^{(n)}(\theta). \quad \square$$

Применим к задаче (3) S-преобразование. Преобразованная задача имеет вид

$$\frac{d\widehat{X}(t,\theta)}{dt} = A\widehat{X}(t,\theta) + B(\widehat{X}(t,\theta))\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta), \quad X(0) = \hat{\zeta}, \quad \theta \in \mathscr{S}, \tag{15}$$

где $\widehat{X}(t,\theta) = \mathrm{S}[X(t)](\theta)$, $\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta) = \mathrm{S}[\mathbb{W}(t)](\theta)$, $\hat{\zeta} = \mathrm{S}[\zeta](\theta)$. При этом в силу леммы 2 $\hat{\zeta} \in \operatorname{dom} A$.

Лемма 3. *Пусть ядерный оператор Q, определенный равенством* (11), *таков, что для некоторого $p_* \in \mathbb{N}$ выполнено условие* (12). *Тогда для любого $p \ge p_*$ найдутся такие $K_p, C_p > 0$, что выполнены неравенства*

$$\|\widehat{\mathbb{W}}(\cdot,\theta)\|_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H}_Q)} \le K_p|\theta|_p, \tag{16}$$

$$\|\widehat{\mathbb{W}}'(\cdot,\theta)\|_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H}_Q)} \le C_p|\theta|_{p+1}. \tag{17}$$

Доказательство. Если условие (12) выполнено для некоторого p_*, оно выполнено и для всех $p > p_*$. Пользуясь тем, что элементы вида $\sigma_j\xi_i e_j$, $i,j \in \mathbb{N}$, образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{R};\mathbb{H}_Q)$, и применяя оценки (5) и (13), получим

$$\|\widehat{\mathbb{W}}(\cdot,\theta)\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H}_Q)} = \left\|\sum_{i,j=1}^{\infty}(\xi_{n(i,j)},\theta)\xi_i e_j\right\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H}_Q)}$$

$$= \left\|\sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{(\xi_{n(i,j)},\theta)}{\sigma_j}\sigma_j\xi_i e_j\right\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H}_Q)} = \sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{|(\xi_{n(i,j)},\theta)|^2}{\sigma_j^2} \le \sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{|\theta|_p^2}{\sigma_j^2(2n(i,j))^{2p}}$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_j^2 i^{2p} j^{2p}}|\theta|_p^2 =: K_p|\theta|_p^2.$$

Для доказательства оценки (17) воспользуемся известным свойством функций Эрмита:

$$\xi_i'(t) = \sqrt{\frac{i}{2}}\xi_{i-1}(t) + \sqrt{\frac{i+1}{2}}\xi_{i+1}(t), \quad i \in \mathbb{N},$$

где $\xi_0(t) \equiv 0$. Получим

$$\|\widehat{\mathbb{W}}'(\cdot,\theta)\|_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H}_Q)} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{|\sqrt{i+1}(\xi_{n(i,j)},\theta) + \sqrt{i}(\xi_{n(i-1,j)},\theta)|^2}{2\sigma_j^2}$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{2\sigma_j^2}\left(\frac{\sqrt{i+1}}{(2ij)^{p+1}} + \frac{\sqrt{i}}{(2(i-1)j)^{p+1}}\right)^2 |\theta|_{p+1}^2 =: \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij}|\theta|_{p+1}^2 =: C_p|\theta|_{p+1},$$

поскольку $c_{ij} = O\big(\frac{1}{\sigma_j^2 i^{2p+1} j^{2p+2}}\big)$. $\square$

Введем последовательность операторов $\{T_k(t,\theta)\}_{k=0}^{\infty}$, $t \ge 0$, $\theta \in \mathscr{S}$, положив

$$T_0(t,\theta) = U(t),$$

$$T_k(t,\theta)x = \int_0^t U(t-s)B(T_{k-1}(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds, \quad x \in H,\ k = 1,2,\dots.$$

Лемма 4. *Пусть* $x \in \operatorname{dom} A$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *функция* $T_k(t,\theta)x \in \operatorname{dom} A$ *дифференцируема, при этом*

$$T_k'(t,\theta)x = AT_k(t,\theta)x + B(T_{k-1}(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta) \tag{18}$$

(*при* $k = -1$ *полагаем* $T_k(t,\theta)x \equiv 0$).

Доказательство. Проведем индукцию по k. При $k = 0$ утверждение верно в силу свойств полугрупп класса C_0:

$$T_0(t,\theta)x = U(t)x \in \operatorname{dom} A, \quad \frac{d}{dt}T_0(t,\theta)x = \frac{d}{dt}U(t)x = AU(t)x = AT_0(t,\theta)x.$$

Предположим, что утверждение справедливо для некоторого k. Пусть $x \in \operatorname{dom} A$. Без ограничения общности можем считать, что $0 \in \rho(A)$. Тогда

$$T_{k+1}(t,\theta)x = \int_0^t U(t-s)AA^{-1}B(T_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds$$

$$= \int_0^t AU(t-s)A^{-1}B(T_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds = \int_0^t U'(t-s)A^{-1}B(T_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds$$

$$- \int_0^t \frac{d}{ds}U(t-s)A^{-1}B(T_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$T_{k+1}(t,\theta)x = -A^{-1}B(T_k(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta) + U(t)A^{-1}B(T_k(0,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta)$$

$$+ \int_0^t U(t-s)A^{-1}B(T_k'(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds$$

$$+ \int_0^t U(t-s)A^{-1}B(T_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}'(s,\theta)\,ds. \tag{19}$$

Слагаемые полученной суммы дифференцируемы, при этом

$$\begin{aligned}T'_{k+1}(t,\theta)x &= -A^{-1}B(T'_k(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta) - A^{-1}B(T_k(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}'(t,\theta)\\ &\quad + U(t)B(T_k(0,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta) + A^{-1}B(T'_k(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta)\\ &\quad + \int_0^t AU(t-s)A^{-1}B(T'_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds + A^{-1}B(T_k(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}'(t,\theta)\\ &\quad + \int_0^t AU(t-s)A^{-1}B(T_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}'(s,\theta)\,ds\\ &= U(t)B(T_k(0,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta) + \int_0^t U(t-s)B(T'_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds\\ &\quad + \int_0^t U(t-s)B(T_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}'(s,\theta)\,ds. \qquad (20)\end{aligned}$$

С другой стороны, правая часть равенства (19) принадлежит $\operatorname{dom} A$. Применяя к обеим его частям оператор A, получим

$$\begin{aligned}AT_{k+1}(t,\theta)x &= -B(T_k(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta) + U(t)B(T_k(0,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta)\\ &\quad + \int_0^t U(t-s)B(T'_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds + \int_0^t U(t-s)B(T_k(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}'(s,\theta)\,ds,\end{aligned}$$

откуда следует

$$T'_{k+1}(t,\theta)x = AT_{k+1}(t,\theta)x + B(T_k(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta). \quad \square$$

Как известно, полугруппы класса C_0 обладают свойством экспоненциальной ограниченности. Пусть $M > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ таковы, что для операторов полугруппы $\{U(t) \mid t \geq 0\}$, порожденной оператором A, выполнена оценка

$$\|U(t)\| \leq Me^{at}, \quad t \geq 0. \qquad (21)$$

Лемма 5. *Пусть $p_* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что ядерный оператор Q, определенный равенством* (11), *удовлетворяет условию* (12). *Тогда для любого $p \geq p_*$ справедлива оценка*

$$\|T_k(t,\theta)\|_{\mathscr{L}(H)} \leq M^{k+1}K_p^k\|B\|^k e^{at}|\theta|_p^k\sqrt{\frac{t^k}{k!}}, \quad k = 0,1,2,\dots, \qquad (22)$$

где $K_p > 0$ — константа из оценки (16) *леммы* 3, *$M > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ — константы из оценки* (21), *$\|B\| = \|B\|_{\mathscr{L}(H,\mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q;H))}$.*

Доказательство. При $k = 0$ оценка (22) верна в силу (21). Предположим, что (22) верно для некоторого k. Тогда для любого $x \in H$ имеем

$$\|T_{k+1}(t,\theta)x\| = \left\|\int_0^t U(t-s)B(T_k(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds\right\|$$

$$\le \int_0^t \|U(t-s)B(T_k(t,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|\,ds$$

$$\le M\|B\| \int_0^t e^{a(t-s)} \|T_k(s,\theta)x\| \|\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q}\,ds$$

$$\le M^{k+2}K_p^k\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_p^k\|x\| \int_0^t \sqrt{\frac{s^k}{k!}}\|\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q}\,ds$$

$$\le M^{k+2}K_p^k\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_p^k\|x\| \left(\int_0^t \frac{s^k}{k!}\,ds\right)^{1/2} \|\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H}_Q)}.$$

Интегрируя и используя оценку (16), получаем

$$\|T_{k+1}(t,\theta)x\| \le M^{k+2}K_p^k\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_p^{k+1}\sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}|\theta|_p^{k+1}\|x\|. \quad \square$$

Лемма 6. *Пусть* $p_* \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *такое, что ядерный оператор* Q*, определенный равенством* (11)*, удовлетворяет условию* (12)*. Тогда для любых* $p \ge p_*$ $x \in \operatorname{dom} A$ *и* $\theta \in \mathscr{S}$ *справедливы следующие оценки:*

$$\|T_0'(t,\theta)x\| \le Me^{at}\|Ax\|, \tag{23}$$

$$\|T_k'(t,\theta)x\| \le M^k\|B\|^k e^{at}\cdot\Bigg[\|\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q}(K_p|\theta|_p)^{k-1}\sqrt{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}}\|x\|$$
$$+ M((K_p|\theta|_p)^k\|Ax\| + k(K_p|\theta|_p)^{k-1}C_p|\theta|_{p+1}\|x\|)\sqrt{\frac{t^k}{k!}}\Bigg], \quad k=1,2,3,\dots, \tag{24}$$

где $K_p > 0$ *и* C_p *— константы из оценок* (16) *и* (17) *леммы* 3, $M > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$ *— константы из оценки* (21).

Доказательство. Пользуясь известными свойствами полугрупп класса C_0, для любого $x \in \operatorname{dom} A$ имеем

$$T_0'(t,\theta)x = U'(t)x = AU(t)x = U(t)Ax,$$

откуда в силу экспоненциальной ограниченности полугруппы следует (23). Далее, применяя равенство (20), для $x \in \operatorname{dom} A$ получаем

$$\|T_1'(t,\theta)x\| \le \|U(t)B(x)\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta)\|$$
$$\int_0^t \|U(t-s)[B(T_0'(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta) + B(T_0(s,\theta)x)\widehat{\mathbb{W}}'(s,\theta)]\|\,ds$$
$$\le Me^{at}\|B\|\|x\|\|\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q} + Me^{at}\int_0^t e^{-as}\|B\|[\|T_0'(s,\theta)x\|\|\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q}$$
$$+ \|T_0(s,\theta)x\|\|\widehat{\mathbb{W}}'(s,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q}]\,ds \le Me^{at}\|B\|\|x\|\|\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q}$$

$$+ Me^{at}\int_0^t e^{-as}\|B\|[Me^{as}\|Ax\|\|\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q} + Me^{as}\|x\|\|\widehat{\mathbb{W}}'(s,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q}]\,ds$$

$$\leq Me^{at}\|B\|\|x\|\|\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q} + M^2e^{at}\|B\|\left[\|Ax\|\int_0^t\|\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q}\,ds + \|x\|\int_0^t\|\widehat{\mathbb{W}}'(s,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q}\,ds\right].$$

Оценивая интегралы с помощью неравенства Гёльдера и оценок (16) и (17) леммы 3, находим

$$\|T_1'(t,\theta)x\| \leq Me^{at}\|B\|\|x\|\|\widehat{\mathbb{W}}(0,\theta)\|_{\mathbb{H}_Q} + M^2e^{at}\|B\|\sqrt{t}(K_p|\theta|_p\|Ax\| + C_p|\theta|_{p+1}\|x\|),$$

т. е. (24) верно при $k = 1$. Далее (24) доказывается индукцией по k с помощью оценок, аналогичных сделанным выше. □

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим ряд

$$T(t,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t,\theta).$$

Из оценки (22) леммы 5 следует его сходимость в $\mathscr{L}(H)$. Таким образом, $T(t,\theta) \in \mathscr{L}(H)$. Докажем, что $T(t,\theta)\hat{\zeta}$ является решением задачи (15) для любых $\hat{\zeta} \in \operatorname{dom} A$, $\theta \in \mathscr{S}$.

Из леммы 4 вытекает дифференцируемость членов ряда, определяющего $T(t,\theta)\hat{\zeta}$. При этом оценка (24) леммы 6 влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k'(t,\theta)\hat{\zeta}$ для любого $\hat{\zeta} \in \operatorname{dom} A$. Таким образом, при $\hat{\zeta} \in \operatorname{dom} A$ функция $T(t,\theta)\hat{\zeta}$ дифференцируема и $T'(t,\theta)\hat{\zeta} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k'(t,\theta)\hat{\zeta}$. Суммируя равенства (18) по $k = 0, 1, 2, \dots$ и пользуясь ограниченностью оператора B и замкнутостью оператора A, получим

$$T'(t,\theta)\hat{\zeta} = AT(t,\theta)\hat{\zeta} + B(T(t,\theta)\hat{\zeta})\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta).$$

При этом $T(0,\theta)\hat{\zeta} = U(0)\hat{\zeta} = \hat{\zeta}$.

Докажем единственность решения задачи (15). Если $\widehat{X}(\cdot,\theta)$ — некоторое ее решение для некоторого $\theta \in \mathscr{S}$, то оно является решением уравнения

$$\widehat{X}(t,\theta) = U(t)\hat{\zeta}(\theta) + \int_0^t U(t-s)B(\widehat{X}(s,\theta))\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, достаточно доказать, что уравнение

$$\widehat{X}(t,\theta) - \int_0^t U(t-s)B(\widehat{X}(s,\theta))\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds = 0, \quad t \geq 0, \tag{25}$$

имеет только тривиальное решение $\widehat{X}(\cdot,\theta) \equiv 0$ на $[0;\infty)$ для любого $\theta \in \mathscr{S}$.

В силу оценок (5) и (13) и известной оценки функций Эрмита: $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\xi_i(t) = O(i^{-1/12})$, имеем

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{(\xi_{n(i,j)},\theta)}{\sigma_j}\xi_i(t)\right| = O\biggl(\frac{1}{\sigma_j i^{p+\frac{1}{12}}j^p}\biggr) \quad \text{для всех } p\in\mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\widehat{\mathbb{W}}(t,\theta)\|^2_{\mathbb{H}_Q} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\Bigl(\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{(\xi_{n(i,j)},\theta)}{\sigma_j}\xi_i(t)\Bigr)^2$$

ограничена на $\mathbb{R}$, стало быть, существует константа $K > 0$ такая, что

$$\left\|\int_0^t U(t-s)B(\widehat{X}(s,\theta))\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds\right\|_H \le \int_0^t Me^{a(t-s)}\|B\|\|\widehat{X}(s,\theta)\|_H\|\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|_{\mathbb{H}}\,ds$$

$$\le K\int_0^t\|\widehat{X}(s,\theta)\|_H\,ds \le Kt\sup_{t\in[0;T]}\|\widehat{X}(t,\theta)\|_H, \quad 0\le t\le T.$$

С помощью этой оценки, используя технику уравнений Вольтерра, нетрудно доказать, что некоторая степень интегрального оператора

$$\int_0^t U(t-s)B(\cdot)\widehat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds$$

является сжатием в пространстве непрерывных H-значных функций на $[0;T]$ с нормой $\|X\| = \sup\limits_{t\in[0;T]}\|X(t)\|_H$. Это влечет за собой единственность решения уравнения (25).

В силу того, что $\zeta\in(\mathscr{S}_{-q_*})_{-0}(H)$ для некоторого $q_*\in\mathbb{N}$ и $(\mathscr{S}_{-q_*})_{-0}(H)\subset(\mathscr{S}_{-p})_{-0}(H)$ при $p > q_*$, пользуясь оценкой (8), получаем

$$\|\hat\zeta(\theta)\| = \|(\mathrm{S}\zeta)(\theta)\| = \|\zeta[\mathscr{E}_\theta]\| \le \|\zeta\|_{-p,-0}\|\mathscr{E}_\theta\|_{p,0} \le \|\zeta\|_{-p,-0}\exp\bigl(|\theta|^2_p\bigr),$$

$\theta\in\mathscr{S}$, $p\ge q_*$. Если $p_*\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ такое, что верна оценка (12), для любого $p\ge p_*$, применяя оценку (22), имеем

$$\|T(t,\theta)\| \le \sum_{k=0}^\infty\|T_k(t,\theta)\| \le Me^{at}\sum_{k=0}^\infty M^kK_p^k\|B\|^k|\theta|_p^k\sqrt{\frac{t^k}{k!}}$$

$$\le Me^{at}\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{(2M^2K_p^2\|B\|^2|\theta|_p^2t)^k}{k!}\right)^{\frac12}\left(\sum_{k=0}^\infty\left(\frac12\right)^k\right)^{\frac12}$$

$$\le M\sqrt{2}e^{(a+M^2K_p^2\|B\|^2|\theta|_p^2)t}.$$

Таким образом, для любых $t\ge 0$ и $p\ge\max\{p_*;q_*\}$ справедлива следующая оценка:

$$\|T(t,\theta)\hat\zeta(\theta)\| \le M\sqrt2\,e^{at}\exp\bigl((M^2\|B\|^2t+1)|\theta|_p^2\bigr)\|\zeta\|_{-p,-0}, \quad \theta\in\mathscr{S}.$$

По теореме 1 из этой оценки следует, что $T(t,\theta)\hat\zeta(\theta)$ является S-преобразованием некоторой функции $X:[0;\infty)\to(\mathscr{S})_{-0}(H)$. Поскольку $T(t,\theta)\hat\zeta(\theta) = \mathrm{S}[X(t)](\theta)$ является единственным решением задачи (15), $X(t)$ — единственное решение задачи (3). $\square$

§ 4. Пример

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для дифференциального уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial X(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial X(t,x)}{\partial x} - m(x)X(t,x), \quad t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1, \tag{26}$$

$$X(0,x) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{27}$$

$$X(t,0) = 0, \quad t \geq 0. \tag{28}$$

Уравнение (26) возникает, например, в популяционной динамике как математическая модель популяции, структурированной по возрасту (уравнение Мак-Кендрика — фон Ферстера). Задачу (26)–(28) можно рассмотреть как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения вида

$$X'(t) = AX(t),\ t \geq 0, \quad X(0) = \phi,$$

в гильбертовом пространстве $H = L^2[0;1]$ где $A = -\frac{d}{dx} - m(x)$ с $\operatorname{dom} A = \{X \in H \mid X \in H^1[0;1], X(0) = 0\}$. Если $m(x)$ ограничена на $[0;1]$, то оператор умножения на $m(x)$ ограниченный в H. Дифференциальный оператор $-\frac{d}{dx}$ — генератор полугруппы сдвига $U(t)X(x) = X(x-t)$, которая является полугруппой класса C_0. Методами теории возмущений полугрупп доказывается, что A является генератором полугруппы класса C_0 в H.

Пусть $\mathbb{H} = H$, $B(\cdot)$ — оператор, ставящий в соответствие каждой функции $X \in H$ оператор умножения на эту функцию $B(X) : \mathbb{H} \to H$:

$$[B(X)v](x) = X(x)v(x).$$

Этот оператор удовлетворяет условию (II). Действительно, рассмотрим в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, где $e_j(x) = \sqrt{2}\sin \pi jx$. Пусть Q — ядерный оператор, определенный равенством (11). Функции $\sigma_j e_j(x)$ образуют ортонормированный базис в $\mathbb{H}_Q$. При этом

$$\|B(X)\|^2_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)} = \sum_{j=1}^{\infty} \|B(X)\sigma_j e_j\|^2_H$$
$$= 2\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \int_0^1 |X(x)\sin \pi jx|^2\,dx \leq 2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j^2\right)\|X\|^2_H,$$

т. е. $B(\cdot) \in \mathscr{L}(H;\mathscr{L}_2(\mathbb{H}_Q;H))$. Таким образом, задача Коши (3), где $\mathbb{W}(t)$ — $\mathbb{H}$-значный цилиндрический белый шум, определенный равенством (7), для данных операторов A и B имеет единственное решение в пространстве $(\mathscr{S})_{-0}(H)$. В силу предложения 1 правую часть уравнения задачи (3) можно записать в виде

$$AX(t) + B\big(X(t)\big) \diamond \mathbb{W}(t) = -\frac{\partial X(t)}{\partial x} - B(X(t)) \diamond (m + \mathbb{W}(t)).$$

Таким образом, слагаемое $B(X(t)) \diamond \mathbb{W}(t)$ является возмущением с помощью белого шума оператора умножения на функцию m.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ichikawa A.* Stability of semilinear stochastic evolution equations // J. Math. Anal. Appl. 1982. N 90. P. 12–44.
2. *Ichikawa A.* Semilinear stochastic evolution equations: boundedness, stability and invariant measures // Stochastics. 1984. N 12. P. 1–39.
3. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2014.
4. *Gawarecki L., Mandrekar V.* Stochastic differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2011.
5. *Melnikova I. V.* Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Generalized and regularized solutions. Boca Raton; London; New York: CRS Press, 2016.
6. *Альшанский М.* Интегралы Ито и Хицуды — Скорохода в бесконечномерном случае // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. № 11. С. 185–199.
7. *Filinkov A., Sorensen J.* Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions // Stoch. Stoch. Rep. 2002. V. 72, N 3–4. P. 129–173.
8. *Melnikova I. V., Filinkov A. I., Alshansky M. A.* Abstract stochastic equations. II. Solutions in spaces of abstract stochastic distributions // J. Math. Sci., New York. 2003. V. 116, N 5. P. 3620–3656.
9. *Kondratiev Yu. G., Streit L.* Spaces of white noise distribution: constructions, descriptions, applications. I // Rep. Math. Phys. 1993. N 33. P. 341–366.
10. *Melnikova I. V., Alshansky M. A.* Infinite dimensional stochastic equation with multiplicative noise in spaces of stochastic distributions // Novi Sad J. Math. 2011. V. 41, N 1. P. 1–10.
11. *Melnikova I. V., Alshansky M. A.* S-transform and Hermite transform of Hilbert space-valued stochastic distributions with applications to stochastic differential equations // Integral Transforms Spec. Funct. 2011. V. 22, N 4–5. P. 293–301.
12. *Мельникова И. В., Альшанский М. А.* Обобщенная корректность задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения с мультипликативным шумом // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 251–267.
13. *Мельникова И. В., Альшанский М. А.* Дифференциальные уравнения в пространствах абстрактных стохастических распределений // Докл. АН. Математика. 2016. Т. 469, № 1. С. 21–25.
14. *Minlos R. A.* Generalized random processes and their extension to a measure // Selected Transl. Math. Stat. Probab. 1963. N 3. P. 291–313.
15. *Hida T.* Brownian motion. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1980.
16. *Kuo H.-H.* White noise distribution theory. Boca Raton, FL: CRS Press, 1996.
17. *Holden H., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T.* Stochastic partial differential equations. A. Modelling, white noise functional approach. Boston: Birkhäuser, 1996.

Статья поступила 10 ноября 2015 г., окончательный вариант — 13 мая 2017 г.

Мельникова Ирина Валерьяновна
Уральский федеральный университет им. первого президента России Б. Н. Ельцина,
Институт естественных наук и математики,
пр. Ленина, 51, Екатеринбург 620000
Irina.Melnikova@urfu.ru

Альшанский Максим Алексеевич
Уральский федеральный университет им. первого президента России Б. Н. Ельцина,
Институт радиотехники и информационных технологий,
ул. Мира, 32, Екатеринбург 620002
m.a.alshansky@urfu.ru