

О ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ПРЕДЕЛАХ РЕТРАКТИВНЫХ СПЕКТРОВ

А. Г. Пинус

Аннотация. Доказываются универсальная эквивалентность прямых и обратных пределов ретрактивных спектров универсальных алгебр и ряд следствий из этого утверждения.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.615

Ключевые слова: спектры универсальных алгебр, прямой и обратный пределы спектров, решетка подалгебр.

При изучении свойств алгебраических систем, выражимых в том или ином логическом языке (логики первого порядка, его универсальном фрагменте и прочих), естествен интерес к нахождению для данной системы ее подсистем меньшей мощности, имеющих тот же набор свойств, что и исходная система. Значительное число подобных результатов можно найти, к примеру, в известной монографии [1]. Естествен и интерес к конструкциям универсальной алгебры и теории моделей, которые могли бы давать подобные пары алгебраических систем: самой системы и ее подсистемы меньшей мощности, моделирующей тот или иной набор ее свойств.

Среди различных конструкций универсальной алгебры таких, как фактор-алгебры, прямые, подпрямые, ультрапроизведения и др., не менее значимое место занимают конструкции прямых и обратных пределов, соответственно прямых и обратных спектров универсальных алгебр.

В настоящей работе выделен некоторый достаточно важный класс подобных спектров, прямые и обратные пределы которых связаны отношением универсальной (в теоретико-модельном смысле) эквивалентности. Полученный результат имеет приложения в конкретных ситуациях, к примеру, в решетках функциональных клонов и в решетках их фрагментов, в решетках подалгебр свободных алгебр и в других ситуациях.

Пусть $\langle I; \leq \rangle$ — некоторое направленное вверх упорядоченное множество и $\mathfrak{A}_i = \langle A_i; \sigma \rangle$ ($i \in I$) — совокупность универсальных алгебр сигнатуры σ . Пусть ψ_i^j для $i \leq j$ из I — некоторый ретрактивный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_j$ на алгебру $\mathfrak{A}_i$, а φ_j^i — вложение алгебры $\mathfrak{A}_i$ в алгебру $\mathfrak{A}_j$ такие, что $\psi_i^j \varphi_j^i$ является тождественным отображением алгебры $\mathfrak{A}_i$ на себя. В дальнейшем отождествим алгебру $\mathfrak{A}_i$ с подалгеброй $\varphi_j^i(\mathfrak{A}_i)$ алгебры $\mathfrak{A}_j$. Пусть при этом $\psi_i^j \psi_j^k = \psi_i^k$, $\varphi_k^j \varphi_j^i = \varphi_k^i$ для $i \leq j \leq k$ из I и ψ_i^i , φ_i^i — тождественные отображения алгебры $\mathfrak{A}_i$ на себя. Таким образом, мы имеем дело с двумя спектрами: прямым $\vec{\mathfrak{S}} = \langle \mathfrak{A}_i (i \in I); \varphi_j^i (i \leq j \text{ из } I) \rangle$ и обратным $\overleftarrow{\mathfrak{S}} = \langle \mathfrak{A}_i (i \in I); \psi_i^j (i \leq j \text{ из } I) \rangle$.

Совокупность $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{A}_i (i \in I); \varphi_j^i, \psi_i^j (i \leq j \text{ из } I) \rangle$ будем называть *ретрактивным спектром* универсальных алгебр, а через $\overrightarrow{\mathfrak{L}}$ и $\overleftarrow{\mathfrak{L}}$ будем обозначать соответствующие $\mathfrak{L}$ прямой и обратный спектры. Через $\lim_{\rightarrow} \overrightarrow{\mathfrak{L}}$ обозначим прямой предел спектра $\overrightarrow{\mathfrak{L}}$, т. е. в этом случае алгебру $\mathfrak{A}'$, являющуюся объединением направленной вверх по включению совокупности алгебр $\mathfrak{A}_i (i \in I)$. Через $\lim_{\leftarrow} \overleftarrow{\mathfrak{L}}$ обозначим обратный предел спектра $\overleftarrow{\mathfrak{L}}$ (если таковой существует; напомним, к примеру, одно из условий [2], которые гарантируют существование обратного предела: алгебры $\mathfrak{A}_i$ конечны), т. е. подалгебру $\mathfrak{A}$ алгебры $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ с основным множеством $A = \{f \in \prod_{i \in I} A_i \mid f(i) = \psi_i^j(f(j)) \text{ для } i \leq j \text{ из } I\}$. Очевидным образом обратный предел любого ретрактивного спектра $\mathfrak{L}$ существует и непуст.

Имеет место

Теорема 1. Для любого ретрактивного спектра $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{A}_i (i \in I); \varphi_j^i, \psi_i^j (i \leq j \text{ из } I) \rangle$ универсальных алгебр его прямой предел $\mathfrak{A}' = \lim_{\rightarrow} \overrightarrow{\mathfrak{L}}$ универсально эквивалентен его обратному пределу $\mathfrak{A} = \lim_{\leftarrow} \overleftarrow{\mathfrak{L}}$.

Доказательство. Определим отображение η алгебры $\mathfrak{A}' = \langle A' = \bigcup_{i \in I} A_i; \sigma \rangle$ в алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ следующим естественным образом: для любых $j \in I$ и $a \in A_j$ пусть $\eta(a) \in \prod_{i \in I} A_i$ таково, что для $i \leq j$ из I имеем $\eta(a)(i) = \psi_i^j(a)$, а для $i \not\leq j$ и любого $k \leq i, j$ выполняется $\psi_k^j(\eta(a)(j)) = \psi_k^i(\eta(a)(i))$. Непосредственно проверяется, что η является изоморфным вложением алгебры $\mathfrak{A}'$ в алгебру $\mathfrak{A}$.

Для доказательства универсальной эквивалентности алгебр $\mathfrak{A}$ и $\eta(\mathfrak{A}')$ требуется показать, что из истинности на $\mathfrak{A}$ формулы $\exists x_1, \dots, x_n \Phi(x_1, \dots, x_n)$ следует истинность этой формулы и на алгебре $\eta(\mathfrak{A}')$. Здесь формула Φ имеет вид

$$\bigwedge_{i=1}^m t_i^1(x_1, \dots, x_n) = t_i^2(x_1, \dots, x_n) \bigwedge_{i=1}^r t_i^3(x_1, \dots, x_n) \neq t_i^4(x_1, \dots, x_n),$$

где t_i^j — термы сигнатуры σ .

Пусть $d_1, \dots, d_n \in \mathfrak{A} \subseteq \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ таковы, что $\mathfrak{A} \models \Phi(d_1, \dots, d_n)$, ψ_i ($i \in I$) — гомоморфизмы обратного предела $\mathfrak{A} = \lim_{\leftarrow} \overleftarrow{\mathfrak{L}}$ на алгебры $\mathfrak{A}_i$, по сути, совпадающие с проектированиями алгебры $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ на алгебры $\mathfrak{A}_i$. Так как

$$\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i=1}^r t_i^3(d_1, \dots, d_n) \neq t_i^4(d_1, \dots, d_n),$$

наличие гомоморфизмов ψ_i^j алгебр $\mathfrak{A}_j$ на $\mathfrak{A}_i$ (при $i \leq j \in I$) и направленность вверх множества $\langle I; \leq \rangle$ влекут существование элемента p из I такого, что

$$\mathfrak{A}_p \models \bigwedge_{i=1}^r t_i^3(\psi_p(d_1), \dots, \psi_p(d_n)) \neq t_i^4(\psi_p(d_1), \dots, \psi_p(d_n)).$$

При этом истинность на $\mathfrak{A}$ формулы

$$\bigwedge_{i=1}^m t_i^1(d_1, \dots, d_n) = t_i^2(d_1, \dots, d_n)$$

влечет истинность на $\mathfrak{A}_p$ формулы

$$\bigwedge_{i=1}^m t_i^1(\psi_p(d_1), \dots, \psi_p(d_n)) = t_i^2(\psi_p(d_1), \dots, \psi_p(d_n)).$$

Тем самым на $\mathfrak{A}_p$, а значит, и на алгебре $\eta(\mathfrak{A}')$ истинна формула $\exists x_1, \dots, x_n \Phi(x_1, \dots, x_n)$, что завершает доказательство теоремы.

В качестве одного из примеров приложения этой теоремы, укажем на известную ситуацию об универсальной эквивалентности прямой суммы алгебр и их прямого произведения.

Пусть алгебры $\mathfrak{A}_i = \langle A_i; \sigma \rangle$ ($i \in I$) включают в себя одноэлементные подалгебры $\{e_i\}$. Под прямой суммой $\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ алгебр $\mathfrak{A}_i$ традиционно понимается подалгебра их прямого произведения $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ с основным множеством $\sum_{i \in I} A_i = \{f \in \prod_{i \in I} A_i \mid \{i \in I \mid f(i) \neq e_i\} \text{ — конечно}\}$.

Рассмотрим ретрактивный спектр

$$\mathfrak{L} = \left\langle \prod_{i \in J} \mathfrak{A}_i(J \in P_\omega(I)); \varphi_{J_2}^{J_1}, \psi_{J_1}^{J_2}(J_1 \subseteq J_2; J_1, J_2 \in P_\omega(I)) \right\rangle.$$

Здесь $P_\omega(I)$ — совокупность всех конечных подмножеств множества I и для $J_1, J_2 \in P_\omega(I)$ таких, что $J_1 \subseteq J_2$, $\varphi_{J_2}^{J_1}$ — вложение алгебры $\prod_{i \in J_1} \mathfrak{A}_i$ в алгебру $\prod_{i \in J_2} \mathfrak{A}_i$ такое, что $\varphi_{J_2}^{J_1}(f)(i) = e_i$ для $f \in \prod_{i \in J_1} \mathfrak{A}_i$ при $i \in J_2 \setminus J_1$ и $\varphi_{J_2}^{J_1}(f)(i) = f(i)$ при $i \in J_1$, а $\psi_{J_1}^{J_2}$ — проектирование алгебры $\prod_{i \in J_2} \mathfrak{A}_i$ на алгебру $\prod_{i \in J_1} \mathfrak{A}_i$.

Прямая сумма $\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ алгебр $\mathfrak{A}_i$ естественным образом отождествляется с прямым пределом этого ретрактивного спектра, а их прямое произведение $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ — с обратным пределом спектра $\mathfrak{L}$. Таким образом, из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Прямые суммы универсальных алгебр универсально эквивалентны их прямым произведениям.*

В [3] утверждение типа этой теоремы доказано для ситуации, связанной с тем, что решетка так называемых ограниченно порожденных клонов универсально эквивалентна решетке всех функциональных клонов на любом фиксированном множестве.

Остановимся еще на одном примере, связанном с возможным применением теоремы 1. Речь пойдет о решетках подалгебр некоторых, в частности, свободных алгебр. Вопросы элементарной эквивалентности решеток подалгебр свободных алгебр с различным бесконечным числом порождающих рассматривались в целом ряде работ. В работах автора для ряда многообразий доказано, что для кардиналов ω_i и ω_j решетки подалгебр $\text{Sub}F_\vee(\omega_i)$ и $\text{Sub}F_\vee(\omega_j)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда кардиналы ω_i и ω_j эквивалентны в полной логике второго порядка. Здесь $F_\vee(\omega_i) = F_\vee(x_i \mid i \in \omega_i)$ — свободная ω_i -порожденная алгебра многообразия V . Подробнее об этом см., например, [4]. С другой стороны, представляет интерес нахождение подрешеток решеток $\text{Sub}F_\vee(\omega_i)$, в той или иной мере схожих по своим свойствам с самими этими решетками. Рассмотрим для начала более общую ситуацию.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{L}_i \mid i \in I \rangle$ — некоторая направленная вверх по включению система подалгебр алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{L}_i = \mathfrak{A}$;

б) для $i, j \in I$ если $\mathfrak{L}_i \subseteq \mathfrak{L}_j$, то существует ретрактивный гомоморфизм ψ_i^j алгебры $\mathfrak{L}_j$ на алгебру $\mathfrak{L}_i$ такой, что $\mathfrak{L}_i$ является ретрактом алгебры $\mathfrak{L}_j$ относительно гомоморфизма ψ_i^j и тождественного вложения id_j^i алгебры $\mathfrak{L}_i$ в $\mathfrak{L}_j$.

В этом случае будем говорить, что алгебра $\mathfrak{A}$ *ретрактивно разложима в ретрактивную систему $\mathfrak{L}$ своих подалгебр*.

Определим порядок $\leq$ на индексном множестве I с помощью отношения включения между алгебрами $\mathfrak{L}_i$, т. е. полагая $i \leq j$ (для $i, j \in I$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}_i \subseteq \mathfrak{L}_j$.

Отметим, что свободные $F_V(\omega_i)$ -алгебры ретрактивно разложимы в ретрактивную систему $\mathfrak{L} = \langle F_V(l) = F_V(x_j \mid j \in l \mid l \in \omega_i) \rangle$ своих $F_V(l)$ -свободных подалгебр. Другим примером ретрактивно разложимых алгебр служат, в частности, булевы алгебры Фреше $BF(\omega_i)$ конечных и ко-конечных подмножеств множества ω_i , ретрактивно разложимые в систему своих подалгебр $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{L}_l \mid l \in \omega_i \rangle$, где $\mathfrak{L}_l$ — подалгебра алгебры $BF(\omega_i)$, порожденная конечными подмножествами множества l .

Фиксируем некоторую алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, ретрактивно разложимую в некоторую ретрактивную систему $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{L}_i \mid i \in I \rangle$ своих подалгебр. Для любой подалгебры алгебры $\mathfrak{L} = \langle B; \sigma \rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$ и любого $i \in I$ i - $\mathfrak{L}$ -фрагментом $\mathfrak{L}_i^{\mathfrak{L}}$ алгебры $\mathfrak{L}$ назовем подалгебру $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_i$ алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, в частности, сами подалгебры $\mathfrak{L}_i$ являются i - $\mathfrak{L}$ -фрагментами алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{L}_j$ при $i \leq j$. Подалгебру $\mathfrak{L}$ алгебры $\mathfrak{A}$ назовем $\mathfrak{L}$ -ограниченной, если $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_i^{\mathfrak{L}}$ для некоторого $i \in I$, т. е. если $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_i$ для какого-либо $i \in I$. Очевидно, что для любого $i \in I$ и любых подалгебр $\mathfrak{L}, \mathcal{L}$ алгебры $\mathfrak{A}$ имеем $\mathfrak{L}_i^{\mathfrak{L}} \cap \mathcal{L}_i^{\mathfrak{L}} = (\mathfrak{L} \cap \mathcal{L})_i^{\mathfrak{L}}$.

Отметим также, что $(\langle \mathfrak{L} \cup \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{A}})_i^{\mathfrak{L}} = \langle \mathfrak{L}_i^{\mathfrak{L}} \cup \mathcal{L}_i^{\mathfrak{L}} \rangle_{\mathfrak{A}}$. Здесь $\langle P_{\mathfrak{A}} \rangle$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная подмножеством P множества A . Включение $\supseteq$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $t(\bar{x}, \bar{y})$ — некоторый терм сигнатуры σ , $\bar{b} \in \mathfrak{L}$, $\bar{c} \in \mathcal{L}$ и $t(\bar{b}, \bar{c}) \in (\langle \mathfrak{L} \cup \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{A}})_i^{\mathfrak{L}}$.

Пусть $j \in I$ таково, что $\bar{b}, \bar{c} \in \mathfrak{L}_j$, тогда $t(\bar{b}, \bar{c}) = \psi_i^j(t(\bar{b}, \bar{c})) = t(\psi_i^j(\bar{b}), \psi_i^j(\bar{c}))$, т. е. $t(\bar{b}, \bar{c}) \in \langle \mathfrak{L}_i^{\mathfrak{L}} \cup \mathcal{L}_i^{\mathfrak{L}} \rangle_{\mathfrak{A}}$, что завершает доказательство требуемого равенства.

Тем самым отображение $\psi_i : \text{Sub } \mathfrak{A} \rightarrow \text{Sub } \mathfrak{L}_i$, определенное как $\psi_i(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}_i^{\mathfrak{L}}$ является гомоморфизмом решетки $\text{Sub } \mathfrak{A}$ на решетку $\text{Sub } \mathfrak{L}_i$ i - $\mathfrak{L}$ -фрагментов подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$. Аналогично замечается, что отображение ψ_i^j (для $i \leq j \in I$), определенное как $\psi_i^j(\mathfrak{L}_j^{\mathfrak{L}}) = \mathfrak{L}_i^{\mathfrak{L}}$ для любой $\mathfrak{L} \in \text{Sub } \mathfrak{A}$, является гомоморфизмом решетки $\text{Sub } \mathfrak{L}_j$ на решетку $\text{Sub } \mathfrak{L}_i$, составляющим ретрактивную пару с тождественным вложением решетки $\text{Sub } \mathfrak{L}_i$ в $\text{Sub } \mathfrak{L}_j$.

Таким образом, в случае ретрактивной разложимости алгебры $\mathfrak{A}$ в ретрактивную систему $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{L}_i \mid i \in I \rangle$ ее подалгебр, имеем дело с ретрактивным спектром решеток $\langle \text{Sub } \mathfrak{L}_i (i \in I); \text{id}_j^i, \psi_i^j (i < j \in I) \rangle$. При этом решетка $\text{Sub } \mathfrak{A}$ естественным образом идентифицируется с обратным пределом этого спектра, а ее подрешетка $\text{Sub}_{\mathfrak{L}}^{rg} \mathfrak{A}$ ограниченных подалгебр — с прямым пределом этого ретрактивного спектра. Из утверждения теоремы 1 вытекает

Следствие 2. Для любой алгебры $\mathfrak{A}$, ретрактивно разложимой в некоторую ретрактивную систему $\mathfrak{L}$ своих подалгебр, решетка $\text{Sub}_{\mathfrak{L}}^{rg} \mathfrak{A}$ ее $\mathfrak{L}$ -ограниченных подалгебр универсально эквивалентна решетке $\text{Sub } \mathfrak{A}$ всех ее подалгебр.

Пусть, к примеру, $F_V(\omega)$ — некоторое локально конечное многообразие. Как отмечено выше, $F_V(\omega)$ -свободная счетно порожденная алгебра ретрактивно разложима в систему $\mathfrak{L} = \langle F_V(x_i \mid i \in n) \mid n \in \omega \rangle$ своих подалгебр. В силу следствия 2 континуальная решетка $\text{Sub } F_V(\omega)$ универсально эквивалентна счетной решетке $\text{Sub}_{\mathfrak{L}}^{rg} F_V(\omega)$, совпадающей в данном случае с решеткой всех конечных подалгебр алгебры $F_V(\omega)$.

Отметим еще одно свойство прямых и обратных пределов ретрактивных спектров (для случая, когда множество $\langle I; \leq \rangle$ является упорядоченным множеством $\langle \omega \leq \rangle$ натуральных чисел), связанное с некоторой естественной топологией на этих пределах.

Прежде всего определим некоторое отношение порядка $\leq'$ на алгебре $\mathfrak{A}' = \langle A'; \sigma \rangle$ следующим естественным образом: $a_1 \leq' a_2$ для $a_1, a_2 \in \bigcup_{i \in \omega} A_i$ тогда и

только тогда, когда $a_1 \in A_{i_1}$, $a_2 \in A_{i_2}$, $i_1 \leq i_2$ и $\psi_{i_1}^{i_2}(a_2) = a_1$. Упорядоченное множество $\langle A'; \leq' \rangle$ является лесом, т. е. дизъюнктивным объединением некоторой совокупности деревьев. При этом элементы алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ отождествимы с ветвями этих деревьев: для $a \in A$ соответствующей ветвью является множество $\{\psi_i(a) \mid i \in \omega\}$.

Определим метрики d' и d на множествах A' и A соответственно следующим образом:

для $a_1, a_2 \in A' = \bigcup_{i \in \omega} A_i$

$$d'(a_1, a_2) = \begin{cases} \min\{i \in \omega \mid \psi_i(\eta(a_1)) \neq \psi_i(\eta(a_2))\}^{-1}, & \text{если } a_1 \neq a_2, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

для $a_1, a_2 \in A$

$$d(a_1, a_2) = \begin{cases} \min\{i \in \omega \mid \psi_i(a_1) \neq \psi_i(a_2)\}^{-1}, & \text{если } a_1 \neq a_2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Непосредственно замечается, что для $a_1, a_2 \in A'$ имеем $d'(a_1, a_2) = d(\eta(a_1), \eta(a_2))$, т. е. метрическое пространство $\langle A'; d' \rangle$ отождествимо с подпространством $\eta(A')$ пространства $\langle A; d \rangle$. При этом пространство $\langle A; d \rangle$ полно, а $\eta(A')$ плотно в $\langle A; d \rangle$ и, значит, $\langle A; d \rangle$ является пополнением пространства $\eta(\langle A'; d' \rangle)$.

Непосредственно проверяется, что сигнатурные функции алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ непрерывны для пространства $\langle A; d \rangle$.

Таким образом, имеет место

Следствие 3. Для ретрактивного спектра $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{A}_i (i \in \langle \omega; \leq \rangle), \varphi_j^i, \psi_i^j (i \leq j \text{ из } \omega) \rangle$ его обратный предел $\varprojlim \mathfrak{L}$, наделенный метрикой d , является топологической алгеброй — пополнением своей элементарной подалгебры, изоморфной и изометрической его прямому пределу $\varinjlim \mathfrak{L}$.

В качестве примера укажем на счетно порожденную V -свободную алгебру $\mathfrak{F}_V(x_1, \dots, x_n, \dots)$ произвольного нетривиального многообразия V , являющуюся прямым пределом ретрактивного спектра

$$\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{F}_V(x_1, \dots, x_n) (n \in \omega); \varphi_j^i, \psi_i^j (i \leq j \text{ из } \omega) \rangle,$$

где $\mathfrak{F}_V(x_1, \dots, x_n)$ — V -свободные n -порожденные алгебры, φ_j^i — тождественные вложения алгебр $\mathfrak{F}_V(x_1, \dots, x_i)$ в алгебры $\mathfrak{F}_V(x_1, \dots, x_j)$ для $i \leq j$ и ψ_i^j —

гомоморфизмы $\mathfrak{F}_V(x_1, \dots, x_j)$ на $\mathfrak{F}_V(x_1, \dots, x_i)$ такие, что

$$\psi_i^j(x_k) = \begin{cases} x_k & \text{для } k \leq i, \\ x_i & \text{для } k > i. \end{cases}$$

При этом элементы обратного предела спектра $\mathfrak{L}$ имеют вид последовательностей $\langle t_k(x_1, \dots, x_k) \mid k \in \omega \rangle$, где $t_k(x_1, \dots, x_k)$ — термы многообразия V такие, что на V истинны тождества

$$t_i(x_1, \dots, x_i) = t_j(x_{\pi_i^j(1)}, \dots, x_{\pi_i^j(x_j)}),$$

где $\pi_i^j(k) = \begin{cases} k & \text{для } k \leq i, \\ i & \text{для } k > i. \end{cases}$ В этом случае согласно следствию 1 топологическая алгебра $\langle \varprojlim \mathfrak{L}; d \rangle$ универсально эквивалентна алгебре $\mathfrak{F}_V(x_1, \dots, x_n, \dots)$ и при этом будет пополнением метрического пространства $\langle \mathfrak{F}_V(x_1, \dots, x_n, \dots); d' \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
2. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
3. Пинус А. Г. О фрагментах функциональных клонов // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 4.
4. Бунина Е. И., Михалев А. В., Пинус А. Г. Элементарная и близкие к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр. М.: Изд-во МЦНМО, 2015.

Статья поступила 27 февраля 2017 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru