

ПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ПУАССОНА — ФАРКАСА
И ТЕРНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ ФИЛИППОВА
А. П. Пожидаев

Аннотация. Установлена связь между дифференциально простыми ассоциативными коммутативными алгебрами с единицей и простыми алгебрами Филиппова.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.616

Ключевые слова: алгебра Пуассона, алгебра Филиппова, (супер)алгебра Фаркаса, дифференциально простая алгебра.

Посвящается 70-летию И. П. Шестакова

Введение

Напомним, что супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ — это $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра ($A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$). Элементы из A_0 называются *четными*, а элементы из A_1 — *нечетными*; при этом пишут $p(a) = i$, если $a \in A_i$. В данной статье мы изучаем (тернарные) алгебры, однако большинство результатов легко переносятся на случай супералгебр, поэтому определения сразу даем в общем (супер)случае.

Пусть A — супералгебра Пуассона $(A; \{, \}, \cdot)$, где $(A; \{, \})$ — супералгебра Ли, а $\cdot$ — ассоциативная суперкоммутативная операция такая, что на A выполнено суперттождество Лейбница $\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + (-1)^{p(b)p(c)}\{a, c\} \cdot b$. В выражениях вида $(-1)^{p(a)p(b)}$ и т. п. условимся опускать символ p , т. е. $(-1)^{ab} := (-1)^{p(a)p(b)}$. Пусть D либо однородное ($D(A_i) \subseteq A_{i+p}$) дифференцирование четности $p = p(D)$ в A относительно обеих операций (т. е. для любых однородных $a, b \in A$ выполнены равенства

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + (-1)^{aD} a \cdot D(b), \quad D\{a, b\} = \{D(a), b\} + (-1)^{aD} \{a, D(b)\},$$

здесь и далее обозначаем $(-1)^{aD} := (-1)^{p(a)p(D)}$, либо тождественное отображение на A (при этом $D(a) = a$). Заметим, что если $A_1 = 0$, то приходим к определению алгебры Пуассона.

Определим на векторном пространстве супералгебры A новую тернарную операцию $[, ,]$ правилом

$$[x, y, z] = (-1)^{(x+y)D} \{x, y\} \cdot D(z) - (-1)^{(x+z)D+yz} \{x, z\} \cdot D(y) + D(x) \cdot \{y, z\} \quad (1)$$

для любых однородных $x, y, z \in A$, а далее продолжим ее по линейности. Обозначим получившуюся тернарную супералгебру через A_D (A_E при $D := E := \text{id}$).

Тернарная антикоммутативная алгебра $\mathcal{F}$ называется *алгеброй Филиппова*, если все ее операторы правого умножения являются дифференцированиями данной алгебры (см. детальное определение ниже).

В 1997 г. И. П. Шестаков поставил вопрос: если A — алгебра Пуассона, то будет ли A_D являться алгеброй Филиппова? Автор показал, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен, но при некоторых дополнительных естественных предположениях на алгебру A (выполнение в A тождества Фаркаса) вопрос решается положительно [1].

В настоящей работе продолжаем изучать связь между алгебрами Пуассона — Фаркаса и тернарными алгебрами Филиппова. В §2 теорема 3 дает широкий класс алгебр Фаркаса $A_F[z; d]$, а предложение 1 показывает эквивалентность дифференциальной d -простоты алгебры A и простоты соответствующей алгебры Пуассона. В §3 доказывается основная теорема данной работы о связи простых алгебр Пуассона — Фаркаса $A_F[z; d]$ и простых алгебр Филиппова. В §4 рассматриваем вопрос дифференциальной простоты алгебр усеченных многочленов в некоторых специальных случаях.

В дальнейшем через $\langle w_v; v \in \Upsilon \rangle_F$ будем обозначать линейное пространство над полем F , порожденное семейством векторов $\{w_v; v \in \Upsilon\}$. Символ $:=$ означает равенство по определению.

§1. Супералгебры Пуассона — Фаркаса и Филиппова

Предположим, что на A выполняется тождество

$$\{x, y\} \cdot \{z, u\} + (-1)^{z(x+y)} \{z, x\} \cdot \{y, u\} + (-1)^{x(y+z)} \{y, z\} \cdot \{x, u\} = 0. \quad (2)$$

Алгебры Пуассона с данным тождеством (без знаков четностей) рассматривались Фаркасом (см., например, [2]), поэтому супералгебры Пуассона с данным тождеством будем называть *супералгебрами Пуассона — Фаркаса*, само тождество (2) — *(супер)тождеством Фаркаса*, а (супер)алгебры с тождеством (2) — *супералгебрами Фаркаса*. Если нечетная часть A нулевая, то приходим к понятию *алгебры Пуассона — Фаркаса*.

Пусть $(A = A_0 \oplus A_1; \{, \}, \cdot)$ — супералгебра Пуассона, а Γ — супералгебра Грассмана от нечетных порождающих $x_1, x_2, \dots$. Тогда грассманова оболочка $\Gamma(A) := (A_0 \otimes \Gamma_0) \oplus (A_1 \otimes \Gamma_1)$ является алгеброй Пуассона относительно операций (для однородных элементов $a, b \in A$, $f, g \in \Gamma$)

$$(a \otimes f) \cdot (b \otimes g) = (-1)^{ab}(a \cdot b \otimes fg), \quad \{a \otimes f, b \otimes g\} = (-1)^{ab}\{a, b\} \otimes fg.$$

Если D — супердифференцирование на A относительно обеих операций, то отображение $a \otimes f \mapsto D(a) \otimes f$ является дифференцированием алгебры $\Gamma(A)$ относительно обеих операций, которое также обозначим через D . Легко видеть, что если A — супералгебра Пуассона — Фаркаса, то $\Gamma(A)$ является алгеброй Пуассона — Фаркаса.

Напомним, что *тернарной супералгеброй* над полем F называется $\mathbb{Z}_2$ -градуированная тернарная алгебра $A = A_0 \oplus A_1$ над F (с операцией $(\cdot, \cdot, \cdot)$), т. е. если $x_i \in A_{\alpha_i}$, то $(x_1, x_2, x_3) \in A_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$. *Тернарная супералгебра Филиппова* над F — это тернарная антикоммутативная супералгебра $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$ над F с одной тернарной операцией $[\cdot, \cdot, \cdot]$, удовлетворяющей тождеству

$$[[x_1, x_2, x_3], y, z] = (-1)^{pp_1} [[x_1, y, z], x_2, x_3] + (-1)^{pp_2} [x_1, [x_2, y, z], x_3] + [x_1, x_2, [x_3, y, z]], \quad (3)$$

где $p = p(y) + p(z)$, $p_1 = p(x_2) + p(x_3)$, $p_2 = p(x_3)$. Другими словами, грассманова оболочка тернарной супералгебры $\mathcal{F}$ является тернарной алгеброй Филиппова, где грассманова оболочка определяется аналогично предыдущему.

Как известно (см., например, [3]), один из примеров алгебр Пуассона дают скобки Пуассона — Ли на пространстве многочленов от n переменных. При этом из алгебр такого типа можно построить примеры алгебр Пуассона — Фаркаса и соответственно тернарных алгебр Филиппова [1]. В [1] автором были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $(A; \{, \}, \cdot)$ — супералгебра Пуассона — Фаркаса с дифференцированием D . Тогда $(A_D; [,], \cdot)$ является супералгеброй Филиппова.

Теорема 2. Пусть $(A; \{, \}, \cdot)$ либо супералгебра Пуассона над полем F характеристики 2, либо супералгебра Пуассона — Фаркаса. Тогда $(A_E; [,], \cdot)$ является супералгеброй Филиппова.

§ 2. Координатное кольцо симплектической плоскости

Первоисточником объектов данного параграфа является координатное кольцо симплектической плоскости — хорошо известный пример простой алгебры Пуассона. А именно, это алгебра многочленов $A = \mathbb{C}[x, y]$ со скобкой Пуассона $\{x, y\} = 1$. Данной алгебре соответствует алгебра Вейля $A_1(\mathbb{C})$ от порождающих x, y с соотношением $xy - yx = 1$.

В 1995 г. Фаркас построил пример простой алгебры Пуассона на $A = \mathbb{C}[x, y, z]$ со скобкой Пуассона: $\{x, y\} = 0$, а $\{z, -\}$ действует на $\mathbb{C}[x, y]$ как дифференцирование $\partial_x + (1 - xy)\partial_y$ [4]. Несложно показать, что A является алгеброй Пуассона — Фаркаса (далее это докажем в более общем случае); при этом A_E — простая алгебра Филиппова. Похожий пример построил Бергман для дифференцирования $\partial_x + (1 + xy)\partial_y$ (см. [5]), а Джордан заметил, что аналогично простота доказывается и для случая $\partial_x + (1 + \lambda xy)\partial_y$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ [6].

Дифференцирование d на $\mathbb{C}[x, y]$ называется *простым*, если определяемая им алгебра Пуассона на $\mathbb{C}[x, y, z]$ ($\{x, y\} = 0$, а $\{z, -\}$ действует на $\mathbb{C}[x, y]$ как d) простая.

В 2008 г. Новицки показал, что $d = \partial_x + (y^s + \alpha x)\partial_y$, где $s \geq 2$ и α — ненулевой элемент поля $\mathcal{K}$ характеристики 0, является простым дифференцированием на $\mathcal{K}[x, y]$ [7]. Примеры простых дифференцирований строились в работах многих авторов (см., например, [5, 8–12]).

Пусть $(A; \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F , $f \in \text{End}_F(A)$. На алгебре (усеченных) многочленов $A[z]$ ($A_p[z]$) над A от неизвестной z определим скобку $\{, \}$ правилом

$$\{az^n, bz^k\} = (naf(b) - kbf(a))z^{n+k-1}$$

для любых $a, b \in A$, $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($z^0 := 1$; $z^{-1} := 0$). В частности, $\{A, A\} = 0$, и $\{z, a\} = f(a)$ для любого $a \in A$. Полученную алгебраическую систему $(A; \cdot, \{, \})$ обозначим через $A_F[z; f]$. Пусть $\text{Ann } A := \{x \in A : xa = 0 \ \forall a \in A\}$ — аннулятор алгебры A .

Теорема 3. $A_F[z; f]$ является антикоммутативной алгеброй Фаркаса. При этом $A_F[z; f]$ — алгебра Пуассона — Фаркаса тогда и только тогда, когда $f(ab) - f(a)b - af(b) \in \text{Ann } A$. В частности, это справедливо, если $f \in \text{Der}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = az^n$, $y = bz^k$, $z = cz^m$, $u = dz^r$. Тогда

$$\{az^n, bz^k\}\{cz^m, dz^r\} = (naf(b) - kbf(a))(mcf(d) - rdf(c))z^{n+k+m+r-2}.$$

В итоге

$$\{x, y\}\{z, u\} + \{z, x\}\{y, u\} + \{y, z\}\{x, u\} = ((naf(b) - kbf(a))(mcf(d) - rdf(c)) - (naf(c) - mcf(a))(kbf(d) - rdf(b)) - (mcf(b) - kbf(c))(naf(d) - rdf(a)))z^q = 0,$$

где $q = n + k + m + r - 2$.

Для доказательства второго утверждения достаточно заметить следующие равенства:

$$\begin{aligned} \{az^n \cdot cz^s, bz^k\} &= \{acz^{n+s}, bz^k\} = ((n+s)acf(b) - kbf(ac))z^{n+s+k-1}; \\ \{az^n, bz^k\} \cdot cz^s &= (naf(b) - kbf(a)) \cdot cz^{n+s+k-1}; \\ az^n \cdot \{cz^s, bz^k\} &= a \cdot (scf(b) - kbf(c))z^{n+s+k-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Пусть A — алгебра, d — дифференцирование алгебры A . Напомним, что A называется d -простой, если A не содержит собственных идеалов, инвариантных относительно дифференцирования d .

Предложение 1. Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с 1 над полем F , d — дифференцирование алгебры A . Тогда d -простота A эквивалентна простоте алгебры Пуассона $A_F[z; d]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра Пуассона $\mathcal{A} := A_F[z; d]$ проста. Покажем, что A d -простая. Действительно, если I — ненулевой собственный d -идеал в A , то $I_z := \sum_t Iz^t$ — ненулевой собственный идеал в алгебре Пуассона $\mathcal{A}$:

$$\{Iz^t, az^m\} \subseteq \{Iz^t, a\}z^m + a\{Iz^t, z^m\} \subseteq I\{z^t, a\}z^m + aIz^{t+m-1} \subseteq I_z,$$

где $a \in A$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Обратно, если A d -простая, то и алгебра Пуассона $\mathcal{A}$ простая.

Действительно, пусть I — идеал в $\mathcal{A}$. Возьмем такой $a = \sum_{i=0}^n a_i z^i \in I$, $a_i \in A$, что n минимально и $a_n \neq 0$. Так как $\{a, z\} \in I$, вместо a_n можно также рассматривать $d^k(a_n)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, а также $a_n c$ для любого $c \in A$. Поскольку $\sum_k d^k(a_n)A$ — ненулевой d -идеал в A , можно считать, что $a_n = 1$.

Тогда $\{a, b\} \in I$ для любого $b \in A$ и $\{a, b\} = \sum_{i=1}^n i a_i d(b) z^{i-1}$. Выбирая $b \in A$ так, что $d(b) \neq 0$, можно считать, что в $I \cap A$ лежит ненулевой элемент. Поскольку $\{z, a\} = d(a) \in I$, как и ранее, $J = \sum_k d^k(a)A$ — ненулевой d -идеал в A . Значит, $J = A$, $A \subseteq I$, и $Az^n \subseteq I$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. $I = \mathcal{A}$. $\square$

Лемма 1. Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра над полем характеристики не 2, d — дифференцирование алгебры A и $I := \langle ad(b) - d(a)b : a, b \in A \rangle_F$. Тогда I — d -идеал в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любых $a, b, c \in A$ выполняется

$$2d(a)bc = bd(ac) - acd(b) + cd(ab) - abd(c) \in I.$$

Пусть $c \in A$. Тогда $c(ad(b) - d(a)b) \in I$. Окончательно

$$d(ad(b) - d(a)b) = cd(b) + ad(e) - d(c)b - d(a)e \in I,$$

где $c := d(a)$, $e := d(b)$. $\square$

§ 3. Алгебры Филиппова и алгебры $A_F[z; d]$

Теорема 4. Пусть $\mathcal{A} := A_F[z; d]$ — алгебра Пуассона — Фаркаса с 1 над полем F характеристики не 2, 3, где d — простое дифференцирование алгебры A . Тогда $\mathcal{F} := (\mathcal{A}_E; [, ,])$ является простой алгеброй Филиппова. В случае поля характеристики 3 подпространство $A \oplus Az \oplus A^d z^2$ является идеалом в $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $1 \notin I$ для любого собственного идеала I алгебры $\mathcal{F}$. Предположим противное. Пусть $I \triangleleft \mathcal{F}$, $1 \in I$. Тогда по (1) имеем $\{\mathcal{F}, \mathcal{F}\} \subseteq I$. Следовательно, $\{bz^n, a\} = nbd(a)z^{n-1} \in I$ для любых $a, b \in A, n \in \mathbb{N}$. Так как $A \cdot d(A)$ — ненулевой d -идеал в A , то $A \cdot d(A) = A$. Значит, в случае поля характеристики 0 будет $az^n \in I$ для любых $a \in A, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т. е. $I = \mathcal{F}$.

Пусть основное поле имеет характеристику $p > 0$. В этом случае, как и выше, $az^k \in I$ для любых $a \in A, 0 \leq k < p-1$. Покажем, что az^{p-1} также лежит в I для любого $a \in A$. Имеем

$$\{az, bz^{p-1}\} = d(ab)z^{p-1} \in I \quad (4)$$

для любых $a, b \in A$.

С другой стороны, так как любой $a \in A$ лежит в I , то $[a, bz^n, cz^k] \in I$ для любых $a, b, c \in A$. Имеем

$$[a, bz^n, cz^k] = ((k-n)d(a)bc + nabd(c) - kad(b)c)z^{n+k-1} \in I. \quad (5)$$

В частности, при $n=1, k=p-1$ из (5) получаем $(-2d(a)bc + ad(bc))z^{p-1} \in I$. Так как $A = A^2$, для любого $e \in A$ справедливо $(-2d(a)e + ad(e))z^{p-1} \in I$. Учитывая (4), приходим к включению $-3d(a)ez^{p-1} \in I$. Поскольку характеристика поля не равна 3, то $d(a)ez^{p-1} \in I$ для любых $a, e \in A$, и так как $Ad(A)$ — ненулевой d -идеал в A , то $Az^{p-1} \subseteq I$. В итоге опять $I = \mathcal{F}$, что противоречит собственности идеала I .

Докажем простоту алгебры $\mathcal{F}$. Предположим, что $\mathcal{F}$ не является простой. Тогда $\mathcal{F}$ содержит ненулевой максимальный идеал I . По определению операции в $\mathcal{F}$ (см. (1)) имеем равенство $[1, a, b] = \{a, b\}$ для любых $a, b \in \mathcal{F}$. Тогда $\{I, \mathcal{F}\} \subseteq I$. Более того, $[I \cdot \mathcal{F}, \mathcal{F}, \mathcal{F}] \subseteq I \cdot \mathcal{F} \cdot \mathcal{F} \subseteq I \cdot \mathcal{F}$, откуда $I \cdot \mathcal{F}$ — идеал в $\mathcal{F}$ и $I \subseteq I \cdot \mathcal{F}$ (так как $1 \in \mathcal{F}$). Из максимальной I получаем либо $I = I \cdot \mathcal{F}$, т. е. I — ненулевой идеал в алгебре Пуассона — Фаркаса $\mathcal{A}$, либо $I \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}$. По условию $\mathcal{A}$ проста. Следовательно, $I \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}$. В случае поля характеристики 0 отсюда следует, что существует ненулевой $a \in A \cap I$. Действительно, $I \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}$ влечет существование $u = \sum_{i=0}^n a_i z^i \in I$ такого, что $a_i \in A, a_0 \neq 0$. Если $n > 0$, то

$\{u, b\} \in I$ для любого $b \in A$, откуда $\sum_{i=1}^n i a_i d(b) z^{i-1} \in I$. Осталось заметить, что $b \in A$ можно выбрать так, что $a_n d(b) \neq 0$. Действительно, если $a_n d(A) = 0$, то $a_n Ad(A) = 0$ и $a_n A = 0$, что невозможно.

В случае поля ненулевой характеристики также получаем существование ненулевого $a \in A \cap I$. Действительно, если $a \notin A$, то $a = \sum_{i=0}^{p-1} a_i z^i, a_i \in A, a_k \neq 0$ при некотором $1 \leq k \leq p-1$ и $a_s = 0$ для любого $s > k$. Тогда $\{a, b\} \in I$ для любого $b \in A$ и $\{a, b\} = \sum_{i=1}^k i a_i d(b) z^{i-1}$. Так как $Ad(A) = A$, существует $b \in A$ такой, что $a_k d(b) \neq 0$. Таким образом, можно считать, что в $A \cap I$ лежит ненулевой элемент.

Далее, заметим, что если $a \in A \cap I$ ненулевой, то (5) верно и, полагая в (5) $n = 1$, $k = 0$, получаем $-d(a)bc + abd(c) \in I$. С другой стороны, взяв $n = 0$, $k = 1$, приходим к включению $d(a)bc - ad(b)c \in I$, откуда $a(bd(c) - d(b)c) \in I$ для любых $b, c \in A$. Применяя лемму 1, имеем $aA \subseteq I$.

Полагая в (5) $b = c = 1$, $k = 1$, $n = 0$, получаем $d(a) \in I$, откуда $d^k(a) \in I$ и $d^k(a)A \subseteq I$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $J := \sum_{k=0}^{\infty} d^k(a)A$ — ненулевой d -идеал в A , откуда $J = A$ и $A \subseteq I$. В этом случае $1 \in I$ и, как показано выше, $I = \mathcal{F}$.

Осталось показать, что в случае поля характеристики 3 подпространство $I := A \oplus Az \oplus A^d z^2$ является идеалом в $\mathcal{F}$.

Достаточно заметить, что $I = \mathcal{F}^{(1)} := [\mathcal{F}, \mathcal{F}, \mathcal{F}]$. Действительно, получить $az^2 \in \mathcal{F}^{(1)}$ можно только из произведений $[az^s, bz^n, cz^k]$, где $s + n + k = 3$. Без ограничений общности можно считать, что имеем только два варианта: $(s, n, k) \in \{(0, 1, 2), (1, 1, 1)\}$. В первом случае по (5) получаем $[a, bz, cz^2] = d(abc)z^2 \in I$. Во втором случае

$$[az, bz, cz] = (ad(b) - bd(a))c - (ad(c) - cd(a))b - (cd(b) - bd(c))a = 0,$$

что и доказывает теорему. $\square$

Следствие 1. Пусть $A_F[z; d]$ — алгебра Пуассона — Фаркаса с 1, где $A = F[x, y]$ — алгебра (усеченных) многочленов над полем F характеристики не 2, 3, а d — простое дифференцирование алгебры A . Тогда $\mathcal{F} := (\mathcal{A}_E; [, ,])$ является простой алгеброй Филиппова.

§ 4. О дифференциальной простоте алгебры усеченных многочленов

В связи с результатами § 3 для построения простых алгебр Филиппова характеристики $p > 0$ нас интересуют примеры дифференциально простых ассоциативных коммутативных алгебр с единицей характеристики $p > 0$. Заметим, что получаемые алгебры Филиппова тесно связаны с простыми тернарными алгебрами Филиппова $A(h, t), E(h, t, \mathcal{J}), A_4$, которые получаются как подалгебры и фактор-алгебры алгебры $A(h, t)$ (см. [13, 14, 1]). Отметим также, что классификация простых конечномерных n -лиевых алгебр (Филиппова) над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 получена в [15], и известно, что над такими полями конечномерных простых нетривиальных супералгебр Филиппова не существует [16].

Пусть $A_p = F[x, y]$ — алгебра усеченных многочленов над произвольным полем F характеристики p . Известно, что $\mathbb{C}[x, y]$ d -простая для некоторых дифференцирований d определенных видов (см. § 2). В частности, это верно при $d = \partial_x + \partial_y + xy\partial_y$. Для A_p в самом общем случае это утверждение неверно, так как оно неверно при $p = 2$: идеал, порожденный элементами $x + y$ и xy , является d -инвариантным идеалом (напомним, что $d = \partial_x + \partial_y + xy\partial_y$). Однако следующая лемма позволяет сформулировать гипотезу, что это так при $p > 2$.

Лемма 2. Алгебра A_p d -простая при $2 < p \leq 11$, и $d = \partial_x + \partial_y + xy\partial_y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (для всех p из условия леммы) однообразно и состоит в следующем. Предполагаем, что A_p содержит ненулевой d -инвариантный идеал I . Тогда, выбирая в I ненулевой элемент a и домножая его на подходящий моном $x^k y^m$, $0 \leq k, m \leq p - 1$, можно считать, что $a = x^{p-1} y^{p-1}$. Далее, последовательно применяя d к a , получаем, что $x^{p-1} y^i \in I$ при всех $i = p - 1, \dots, 0$.

В частности, $x^{p-1} \in I$, откуда легко видно (опять же после применения d), что $1 \in I$, т. е. $I = A_p$. Приводить все вычисления в данном доказательстве автор не считает разумным. Поэтому приведем полное доказательство для случаев $p = 3, 5$, а также покажем переход от $x^6 y^6 \in I$ к включению $x^6 y^5 \in I$ при $p = 7$. Итак, пусть $p = 3$ и $a = x^2 y^2$. Обозначим $d^k(a)$ через $a^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, а сумму $\sum_{i=0}^k x^{k-i} y^i$ — через s_k . Тогда

$$a^{(1)} = 2s_3, \quad a^{(2)} = 2s_2 + x^2 y^2, \quad a^{(3)} = x^2 y := b,$$

$$b^{(1)} = 2xy + x^2, \quad b^{(2)} = 2y + x + 2x^2 y, \quad b^{(3)} = 2x^2.$$

В случае $p = 5$ имеем

$$a^{(1)} = -s_7; \quad a^{(2)} = 2s_6 + a; \quad a^{(3)} = -s_5 + 2x^3 y^4;$$

$$a^{(4)} = -s_4 - 2x^4 y^2 + 2x^2 y^4 - 2a; \quad a^{(5)} = 2x^4 y^3 := b;$$

$$b^{(1)} = -x^3 y^3 - 2x^4 y^2; \quad b^{(2)} = 2x^2 y^3 - x^3 y^2 + x^4 y + 2x^4 y^3;$$

$$b^{(3)} = x^4 + 2x^3 y + 3x^2 y^2 - xy^3 - x^4 y^2 - x^3 y^3;$$

$$b^{(4)} = x^3 + 2x^2 y + 3xy^2 - x^3 y^2 - x^2 y^3 + 2x^4 y^3; \quad b^{(5)} = -x^4 y^2 := -c;$$

$$c^{(1)} = 2x^4 y - x^3 y^2; \quad c^{(2)} = 2x^4 + x^3 y + 2x^2 y^2 - 2x^4 y^2;$$

$$c^{(3)} = -x^3 + 2x^2 y - xy^2 + 2x^4 y + x^3 y^2;$$

$$c^{(4)} = -x^2 + 2xy - y^2 + 2x^4 + 2x^3 y + x^2 y^2 + 2x^4 y^2; \quad c^{(5)} = x^4 y := d;$$

$$d^{(1)} = -x^3 y + x^4; \quad d^{(2)} = -2x^3 + 2x^2 y - x^4 y; \quad d^{(3)} = x^2 y - xy - x^4 + 3x^3 y;$$

$$d^{(4)} = x - y - x^3 - 2x^2 y + 3x^4 y; \quad d^{(5)} = 3x^4.$$

Покажем переход от $a = x^6 y^6 \in I$ к включению $x^6 y^5 \in I$ при $p = 7$:

$$a^{(1)} = -s_{11}; \quad a^{(2)} = 2s_{10} + a; \quad a^{(3)} = s_9 - 3x^5 y^5 + 2x^6 y^5;$$

$$a^{(4)} = 3s_8 - 2x^4 y^6 - x^5 y^5 + 3x^6 y^6; \quad a^{(5)} = -s_7 + 3x^3 y^6 - 2x^4 y^5 + 2x^6 y^3 - s_{11};$$

$$a^{(6)} = -s_6 - 3x^6 y^2 + 2x^5 y^3 - 2x^3 y^5 + 2x^6 y^4 + a; \quad a^{(7)} = x^6 y^5.$$

Далее полагаем $b := x^6 y^5$ и аналогично поступаем с b . В итоге получаем $x^6 \in I$ и $I = A_7$.

В случае $p = 11$ доказательство проводится аналогично, только более громоздко, поэтому не будем его приводить. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вычисляя $d^k(a)$ ($k \in \mathbb{N}$), можно сокращать слагаемые, используя полученные ранее элементы из I . Но в этом случае придется искать соотношения на полученные элементы, чтобы получить включения $x^{p-1} y^i \in I$. Прямые же вычисления (без сокращений по модулю I) дают эти включения автоматически.

Если лемма 2 показывает хорошее поведение дифференциальной простоты в характеристике $p > 0$, то следующая лемма утверждает, что в случае характеристики $p > 0$ на самом деле ситуация значительно отличается от нулевой характеристики.

Лемма 3. Алгебра A_p d -простая при $p = 5$ и $d = \partial_x + (y^s + \alpha x)\partial_y$, где $s = 2$, $\alpha \in F \setminus \{0\}$. При этом A_p содержит собственный d -инвариантный идеал, если $s = 4$ или $p = 3$, $s = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дифференцирование Новицкого $d = \partial_x + (y^s + \alpha x)\partial_y$, где $s \geq 2$ и α — ненулевой элемент поля F характеристики $p > 0$. В этом случае $F[x, y]$ не будет дифференциально простой уже при $p = 3$ (в этом случае $s = 2$): идеал $I = \text{id}\langle f \rangle_F$, порожденный элементом $f := y^2 + 2\alpha x^2 y$, является собственным d -инвариантным идеалом в $F[x, y]$, так как $d(f) = x^2 f$. При этом I имеет нулевое ассоциативное умножение, т. е. определяемая им алгебра Филиппова абелева.

В случае $p = 5$, $s = 4$ рассмотрим идеал $I = \text{id}\langle f, g \rangle_F$, где $f = y^3 + 3\alpha x^2 y^2$, $g = y^2 - \alpha x^2 y - \alpha^2 x^4$. Легко видеть, что $d(f) = -\alpha x g$, $d(g) = -2y^2 f$, что доказывает d -инвариантность идеала I .

Рассмотрим случай $p = 5$, $s = 2$. Пусть I — d -инвариантный идеал в $F[x, y]$. Тогда, как и в лемме 2,

$$a := x^4 y^4 \in I, \quad d(a) = -x^3 y^4 \in I,$$

$$a^{(2)} = -3x^2 y^4 + \alpha x^4 y^3 \in I, \quad a^{(3)} \equiv xy^4 + \alpha x^3 y^3 \in I$$

(здесь и ниже $\equiv$ означает сравнимость по модулю I). Далее, $xa^{(3)} + a^{(2)}$ дает $x^2 y^4$, $x^4 y^3 \in I$. Действуя d на $x^2 y^4$ и прибавляя $a^{(3)}$, получаем xy^4 , $x^3 y^3 \in I$. Теперь

$$d(xy^4) = b := y^4 - \alpha x^2 y^3, \quad d(x^3 y^3) \equiv x^2 y^3 + \alpha x^4 y^2.$$

Последовательно действуя d на $y^4 - \alpha x^2 y^3$ и прибавляя $2b$, выводим, что $x^4 y^2$, $x^2 y^3$, $y^4 \in I$, откуда xy^3 , $x^3 y^2 \in I$. Далее, $d(xy^3) \equiv y^3 + 3\alpha x^2 y^2$, и, последовательно действуя d , находим, что $c := y^2 - \alpha x^2 y - \alpha^2 x^4$, $-y^3 + 3\alpha x^2 y^2 \in I$, откуда $y^3 \in I$ и $x^2 y^2 \in I$. Действуя на y^3 , приходим к xy^2 , $x^3 y \in I$; $d(x^3 y) \equiv e := 3x^2 y + \alpha x^4$, $2\alpha e + c = f := y^2 + \alpha^2 x^4$, и, последовательно действуя на f , получаем $xy \in I$, $x^3 \in I$, откуда $1 \in I$ и $I = A_p$. $\square$

В заключение отметим открытый вопрос об условиях изоморфизма получаемых тернарных алгебр Филиппова при выборе различных дифференцирований d для алгебры $A_F[z; d]$ из следствия 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пожидаев А. П. Супералгебры Пуассона и Филиппова // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 637–649.
2. Farkas D. R. Poisson polynomial identities // Commun. Algebra. 1998. V. 26, N 2. P. 401–416.
3. Кантор И. Л. Йорданова и лиева супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // Труды второй сибирской школы «Алгебра и анализ». Томск, 1990. С. 89–125.
4. Farkas D. R. Characterizations of Poisson algebras // Commun. Algebra. 1995. V. 23, N 2. P. 4669–4686.
5. Coutinho S. C. On the differential simplicity of polynomial rings // J. Algebra. 2003. V. 264. P. 442–468.
6. Jordan D. A. Ore extensions and Poisson algebras // Glasgow Math. J. 2014. V. 56, N 2. P. 355–368.
7. Nowicki A. An example of a simple derivation in two variables // Colloq. Math. 2008. V. 113. P. 25–31.
8. Jordan D. A. Differentially simple rings with no invertible derivatives // Quart. J. Math. Oxford. 1981. V. 32. P. 417–424.
9. Coutinho S. C. d -Simple rings and simple D -modules // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1999. V. 125. P. 405–415.

10. Coutinho S. C. On the classification of simple quadratic derivations over the affine plane // J. Algebra. 2008. V. 319. P. 4249–4274.
11. Maciejewski A., Moulin Ollagnier J., Nowicki A. Simple quadratic derivations in two variables // Commun. Algebra. 2001. V. 29. P. 5095–5113.
12. Havran V. S. Simple derivations of higher degree in two variables // Ukrainian J. Math. 2009. V. 61. P. 682–686.
13. Пожидаев А. П. О простых n -лиевых алгебрах // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 334–353.
14. Pojidaev A. P. Enveloping algebras of Filippov algebras // Commun. Algebra. 2003. V. 31, N 2. P. 883–900.
15. Ling W. On the structure of n -Lie algebras // Thes. Siegen Univ.-GHS-Siegen iv.61 p. 1993.
16. Cantarini N., Kac V. G. Classification of simple linearly compact n -Lie superalgebras // Commun. Math. Phys. 2010. V. 298. P. 833–853.

Статья поступила 27 апреля 2017 г.

Пожидаев Александр Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`app@math.nsc.ru`