Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2017. Том 58, № 6

УДК 512.554.5

ПРОСТЫЕ 5–МЕРНЫЕ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ С ТРИВИАЛЬНОЙ ЧЕТНОЙ ЧАСТЬЮ

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков

Аннотация. Изучаются простые правоальтернативные супералгебры, четные части которых тривиальны, т. е. имеют нулевое умножение. Простую правоальтернативную супералгебру с тривиальной четной частью назовем *сингулярной*. Первый пример сингулярной супералгебры приведен в [1]. Наименьшая размерность сингулярной супералгебры равна 5. Доказано, что сингулярные 5-мерные супералгебры изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны подходящие квадратичные формы. В частности, над алгебраически замкнутым полем имеется единственная с точностью до изоморфизма сингулярная 5-мерная супералгебра.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.617

Ключевые слова: простая супералгебра, сингулярная супералгебра, правоальтернативная супералгебра.

Введение

Под супералгеброй $A = A_0 \oplus A_1$ понимается $\mathbf{Z}_2$-градуированная алгебра, в которой $A_0 \neq 0$, $A_1 \neq 0$ и справедливы включения $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j \pmod 2}$.

Супералгебра называется *простой*, если она не имеет собственных градуированных идеалов. Заметим, что $A_1^2 \neq 0$, иначе A_1 является собственным идеалом в $A = A_0 \oplus A_1$.

Супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ правоальтернативная тогда и только тогда, когда для однородных элементов $x, y, z \in A_0 \cup A_1$ выполнено тождество

$$(x, y, z) + (-1)^{|y| \cdot |z|}(x, z, y) = 0, \tag{1}$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, z, $|x|$ — четность однородного элемента $x \in A_0 \cup A_1$, т. е. $|x| = i$, если $x \in A_i$ $(i = 0, 1)$.

В [1] построен пример 5-мерной простой правоальтернативной супералгебры $B_{2|3}$, четная часть которой — двумерная алгебра с нулевым умножением, а нечетная часть является неприводимым бимодулем над четной частью. Супералгебра $B_{2|3}$ имеет своим прототипом правонильпотентную, но не нильпотентную алгебру Дорофеева [2].

Напомним, что $B_{2|3} = A \oplus M$, где $A = \operatorname{span}(a_1, a_2)$, $M = \operatorname{span}(m_1, m_2, m_3)$ — линейные пространства, порожденные указанными элементами, и ненулевыми являются только следующие произведения базисных элементов:

$$\begin{array}{c|l} m_1a_1 = -a_1m_1 = m_3a_2 = -a_2m_3 = m_2, & m_1m_2 = a_1, \\ a_1m_2 = m_3, \quad a_2m_2 = -m_1, & m_3m_2 = a_2. \end{array}$$

Заметим, что A — четная часть, а M — нечетная часть супералгебры $B_{2|3}$. Пусть R_a, L_a — операторы умножения на элемент a, $T \in \{R, L\}$, $T^M(A)$ — подалгебра в алгебре $\mathrm{End}_\Phi(M)$, порожденная множеством $\{R_i, L_i \mid i = 1, 2,\ T_i = T_{a_i}\}$. Легко понять, что $T^M(A) \simeq \mathrm{M}_3(\Phi)$, в частности, M — неприводимый A-бимодуль.

В [3] доказано, что для супералгебр с единицей не существует примеров, аналогичных супералгебре $B_{2|3}$. Более точно, в [3] доказана

Теорема. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная супералгебра над полем Φ характеристики* 0. *Если ее четная часть A унитарна, т. е. $A = \Phi \cdot 1 \oplus \mathrm{Nil}(A)$, и ее единица 1 является единицей в супералгебре B, то супералгебра B ассоциативна и* $\mathrm{Nil}(A) = 0$.

В [4] классифицированы простые конечномерные правоальтернативные унитальные супералгебры абелева типа над полем характеристики нуль. Недавно авторами было анонсировано описание простых конечномерных правоальтернативных унитальных супералгебр с ассоциативно-коммутативной четной частью над полем характеристики нуль [5].

В данной работе, состоящей из четырех параграфов, рассматриваются только простые правоальтернативные супералгебры $B = A \oplus M$ над полем Φ характеристики, отличной от 2. Супералгебру $B = A \oplus M$ назовем *сингулярной*, если ее четная часть A имеет нулевое умножение.

В § 1 даны предварительные сведения. В § 2 доказано, что не существует супералгебр $B = A \oplus M$, в которых $A^2 = 0$ и выполнено одно из ограничений: $d_A = 1$, $d_M \leq 2$, где $d_A = \dim A$, $d_M = \dim M$. Значит, наименьшая размерность сингулярной супералгебры равна 5.

Рассмотрим супералгебру $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi) = A \oplus M$, в которой a_1, a_2 — базис A, m_1, m_2, m_3 — базис M и ненулевыми являются следующие произведения:

$$a_1m_1 = m_2, \quad m_1a_1 = -m_2, \quad a_1m_2 = m_3, \quad a_2m_2 = m_1,$$

$$a_2m_3 = -m_2, \quad m_3a_2 = m_2, \quad m_1m_2 = \varphi a_1 + \xi a_2, \quad m_3m_2 = -\xi a_1 + \psi a_2.$$

Легко видеть, что супералгебра $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$ простая тогда и только тогда, когда $\xi^2 + \varphi\psi \neq 0$. Кроме того, $B_{2|3}(-1, 0, 1) = B_{2|3}$.

В § 3 доказана

Теорема 1. *Всякая простая правоальтернативная сингулярная супералгебра размерности не выше 5 изоморфна супералгебре вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.*

Схема доказательства теоремы 1 такова. В силу известной леммы Алберта для любого $a \in A$ оператор L_a действует на M нильпотентно. Поскольку $d_M = 3$, то $L_a^3 = 0$. Затем доказывается, что существует $a \in A$ такой, что $L_a^2 \neq 0$. Значит, в M существует жорданов базис x_1, x_2, x_3 оператора L_a, т. е. $ax_1 = x_2$, $ax_2 = x_3$, $ax_3 = 0$. Далее, доказывается, что оператор R_a в этом базисе действует по правилу

$$x_1a = -x_2 + \gamma x_3, \quad x_2a = x_3, \quad x_3a = 0.$$

Переходя к новому базису, можно добиться выполнения следующих свойств:

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1a = -x_2, \quad x_2a = x_3a = 0.$$

Далее, можно подобрать элемент $b \in A$, не пропорциональный a, для которого операторы L_b и R_b вместе с операторами L_a и R_a имеют наиболее простой вид в подходящем базисе x_1, x_2, x_3:

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1a = -x_2, \quad x_2a = 0, \quad x_3a = 0,$$
$$bx_1 = 0, \quad bx_2 = x_1, \quad bx_3 = -x_2, \quad x_1b = 0, \quad x_2b = 0, \quad x_3b = x_2.$$

После того как восстановлены умножения нечетных элементов на четные, удается вычислить произведения нечетных элементов. Оказывается, что ненулевыми являются только произведения x_1x_2 и x_3x_2. Тем самым возникают супералгебры вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.

Пока остается неизвестным ответ на вопрос: существуют ли простые правоальтернативные сингулярные супералгебры размерности, большей 5?

В § 4 доказан следующий критерий.

Теорема 2. *Простые супералгебры $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$ и $B_{2|3}(\varphi', \xi', \psi')$ изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны квадратичные формы, заданные матрицами* $\begin{pmatrix} \varphi & \xi \\ \xi & -\psi \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} \varphi' & \xi' \\ \xi' & -\psi' \end{pmatrix}$.

Отсюда вытекает, что над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ простые супералгебры вида $B_{2|3}(p, 0, 1)$, где p — простое целое число, попарно не изоморфны, а также что всякая простая правоальтернативная сингулярная супералгебра размерности не выше 5 над алгебраически замкнутым полем изоморфна супералгебре $B_{2|3}$.

Отметим также, что при изучении первичных альтернативных алгебр, а также простых правоальтернативных супералгебр абелева типа возникают квадратичные формы, определяющие их структуру (см. [2, 4, 6, 7]).

§ 1. Обозначения, тождества и замечания

1.1. Обозначения. Всюду ниже $B = A \oplus M$ — простая сингулярная правоальтернативная супералгебра над полем Φ. Положим $d_A = \dim A$, $d_M = \dim M$. Если не оговорено противное, то указанные латинские буквы, возможно, с индексами, обозначают однородные элементы:

$$a, b, c \in A, \quad x, y \in M, \quad p, q, r \in A \cup M.$$

Как обычно, если $p, q, r \in B$, то $[p, q] = pq - qp$ — коммутатор элементов p, q; $p \circ q = pq + qp$ — йорданово произведение и $(p, q, r) = (pq)r - p(qr)$ — ассоциатор.

Если одно из двух множеств $X, Y \subseteq B$ является подпространством, то положим

$$XY = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid x_i \in X,\ y_i \in Y,\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad X * Y = XY + YX.$$

1.2. Основные тождества. Напомним основные тождества, выполняющиеся в правоальтернативных супералгебрах. Тождество (1) равносильно следующим двум условным тождествам:

$$(pa)q + (pq)a = p(a \circ q), \tag{2}$$

$$(px)y - (py)x = p[x, y]. \tag{3}$$

Кроме того, в правоальтернативной алгебре справедливо правое тождество Муфанг:

$$(p, a, bq) + (p, b, aq) = (p, a, q)b + (p, b, q)a, \tag{4}$$

которое выполнено и в правоальтернативной супералгебре для четных элементов a, b и любых элементов p, q.

1.3. Предварительные замечания. Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Справедливы свойства:* (а) $M^2 = A$, (б) $M = A * M$.

Доказательство. (а) Допустим, что $M^2 \neq A$. Поскольку $M^2 \subseteq A$, то $M^2 \triangleleft A$ и $M^2 + M \triangleleft B$, откуда $M^2 = 0$, значит, $M \triangleleft B$; противоречие.

(б) Достаточно заметить, что $A + A * M \triangleleft B$. Лемма доказана.

Как обычно, через R_a и L_a обозначаются операторы правого и левого умножений на элемент a соответственно, т. е. $xR_a = xa$, $xL_a = ax$.

Хорошо известна

Лемма Алберта [6]. *В правоальтернативной алгебре элемент a нильпотентен тогда и только тогда, когда нильпотентен оператор L_a.*

Точно так же, но значительно проще, доказывается

Лемма 2. *Если $a^2 = 0$, то $T_1 \dots T_4 = 0$, где $T_i \in \{L, R\}$ $(i = \overline{1,4})$, $R = R_a$, $L = L_a$.*

§ 2. Оценки снизу на размерности d_A и d_M

2.1. Ни один из случаев $d_A = 1$ или $d_M = 1$ невозможен. Пусть, от противного, $d_A = 1$; тогда $A = \Phi a$ и $a^2 = 0$. Ввиду лемм 1(б) и 2 имеют место равенства $M = A * M = MT^M(A) = \dots = M(T^M(A))^4 = 0$.

Покажем, что $d_M \geq 2$. Если $d_M = 1$, то $M = \Phi x$ и в силу леммы 1(а) верно $A = M^2 = \Phi a$, где $a = x^2$. Следовательно, $d_A = 1$, что невозможно ввиду предыдущего.

2.2. Случай $(\forall a \in A)L_a^2 = 0$ невозможен. Допустим, что $L_a^2 = 0$ для любого $a \in A$; тогда $(\forall a, b \in A)L_a \circ L_b = 0$. Поскольку всякое операторное слово в правоальтернативной алгебре S ввиду тождества (2) является линейной комбинацией элементов вида

$$L_{a_1} \dots L_{a_m} R_{b_1} \dots R_{b_n}, \quad \text{где } a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in S,$$

с сохранением состава, то алгебра умножений $T^M(A)$ нильпотентна индекса $\leq 2d_A + 1$. Тогда по лемме 1(б) справедливы равенства

$$M = A * M = MT^M(A) = M(T^M(A))^2 = \dots = M(T^M(A))^{2d_A+1} = 0,$$

что невозможно.

2.3. Случай $d_M = 2$ невозможен. Если $d_M = 2$, то $(\forall a \in A)$ $L_a^2 = 0$, поскольку индекс нильпотентности линейного оператора, действующего на M, не превосходит размерности d_M, что невозможно ввиду п. 2.2.

Из пп. 2.1 и 2.2 вытекает следующее

Предложение 1. *Справедливы неравенства $d_A \geq 2$, $d_M \geq 3$. В частности, размерность сингулярной супералгебры не менее 5.*

§ 3. Доказательство теоремы 1

Далее предполагается, что супералгебра $B = A \oplus M$ сингулярна и $d_A = 2$, $d_M = 3$.

3.1. Восстановление оператора R_a по L_a, если $L_a^2 \neq 0$. В силу п. 2.2 существует $a \in A$ такой, что $L_a^2 \neq 0$; тогда ввиду нильпотентности оператора L_a (лемма 2) получаем $L_a^3 = 0$, значит, для оператора L_a в M существует жорданов базис x_1, x_2, x_3, т. е.

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0. \tag{5}$$

Лемма 3. *Если выполнены равенства* (5), *то для подходящих скаляров* $\gamma, \delta \in \Phi$ *справедливы равенства*

$$x_1a = (\delta - 1)x_2 + \gamma x_3, \quad x_2a = \delta x_3, \quad x_3a = 0. \tag{6}$$

Более того, $\delta = 0$ *или* $\delta = 1$.

Доказательство. Записав $x_3a = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3$ и умножив обе части этого равенства слева на a, в силу (5) получаем $a(x_3a) = \lambda_1x_2 + \lambda_2x_3$. Покажем, что $a(x_3a) = 0$. В самом деле, $a(x_3a) = a(x_3 \circ a) = (ax_3)a = 0$. Значит, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $x_3a = \lambda_3x_3$. Тогда $\lambda_3 = 0$, ибо нильпотентный оператор R_a имеет только нулевые собственные значения. Следовательно, $x_3a = 0$.

Записав $x_2a = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \delta x_3$ и умножив обе части этого равенства слева на a, получаем $a(x_2a) = \lambda_1x_2 + \lambda_2x_3$. Поскольку

$$a(x_2a) = -a(ax_2) + a(x_2 \circ a) = a(x_2 \circ a) = (ax_2)a = x_3a = 0,$$

то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $x_2a = \delta x_3$.

Аналогично, считая $x_1a = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \gamma x_3$, имеем $a(x_1a) = \lambda_1x_2 + \lambda_2x_3$. Так как

$$a(x_1a) = -a(ax_1) + a(x_1 \circ a) = -x_3 + (ax_1)a = -x_3 + x_2a = (\delta - 1)x_3,$$

то $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \delta - 1$, следовательно, $x_1a = (\delta - 1)x_2 + \gamma x_3$. Это доказывает равенства (6).

Умножая обе части первого из равенств (6) справа на a и учитывая остальные два равенства, получаем $0 = (\delta-1)x_2a + \gamma x_3a = (\delta-1)\delta x_3$, откуда $(\delta-1)\delta = 0$ и δ совпадает либо с нулем, либо с единицей. Лемма доказана.

3.2. Случай $\delta = 1$ в лемме 3 невозможен.

Лемма 4. *Следующая система равенств:*

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1a = \gamma x_3, \quad x_2a = x_3, \quad x_3a = 0, \tag{7}$$

несовместна.

Доказательство. Допустим, что b — произвольный элемент из A, не пропорциональный a. Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1^0. Докажем, что $(bx_1)a = bx_2$, $(bx_2)a = bx_3 = 0$. Заметим, что ввиду (7) и (2) верно

$$2bx_3 = b(a \circ x_2) = (bx_2)a, \tag{8}$$

значит,

$$(bx_3)a = 0. \tag{9}$$

Кроме того, из (7) следует $x_1 \circ a = x_2 + \gamma x_3$. Стало быть, ввиду (2) имеем

$$(bx_1)a = b(x_1 \circ a) = bx_2 + \gamma bx_3. \tag{10}$$

После умножения справа на a обеих частей этого равенства с учетом (9) и (8) получаем

$$0 = (bx_2)a + \gamma(bx_3)a = (bx_2)a = 2bx_3,$$

значит, $bx_3 = 0$, откуда в силу (10) вытекает $(bx_1)a = bx_2$, что и требовалось в п. 1^0.

2^0. Докажем, что $bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$, $bx_2 = \mu_2 x_3$, $bx_3 = 0$ для подходящих $\mu_2, \mu_3 \in \Phi$. Рассмотрим разложение $bx_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$ и докажем, что $\mu_1 = 0$. Поскольку в силу п. 1^0 верно $(bx_1)a = bx_2$ и $(bx_1)a = \mu_1\gamma x_3 + \mu_2 x_3$ ввиду (7), имеем

$$bx_2 = (\mu_1\gamma + \mu_2)x_3. \tag{11}$$

Положим $M' = \operatorname{span}(x_2, x_3)$. Тогда $bM' \subseteq M'$ в силу п. 1^0 и (11). Кроме того, так как $bx_1 \equiv \mu_1 x_1 \pmod{M'}$, то $\mu_1 = 0$ (нильпотентный оператор L_b имеет только нулевые собственные значения) и $bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$. Отсюда, из п. 1^0 и (11) получаем требуемое в п. 2^0.

3^0. Докажем, что $x_3 * A = 0$. В силу п. 1^0 осталось понять, что $x_3 b = 0$.

Пусть $x_3 b = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$. Тогда $0 = (x_3 b)a = (\gamma\lambda_1 + \lambda_2)x_3$ по (7), откуда $\lambda_2 = -\gamma\lambda_1$ и $x_3 b = \lambda_1 v + \lambda_3 x_3$, где $v = x_1 - \gamma x_2$. Далее, ввиду (2), (7) и п. 1^0

$$a(x_3 b) = a(x_3 \circ b) = (ax_3)b + (ab)x_3 = 0,$$

следовательно, $0 = \lambda_1 av = \lambda_1 a(x_1 - \gamma x_2) = \lambda_1(x_2 - \gamma x_3)$ и $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Тогда $x_3 b = \lambda_3 x_3$. Отсюда вытекает $\lambda_3 = 0$ и $x_3 b = 0$.

4^0. Докажем, что по модулю Φx_3 имеет место система сравнений

$$bx_1 \equiv \mu_2 x_2, \quad bx_2 \equiv 0, \quad bx_3 = 0, \quad x_1 b \equiv \gamma\rho_1 v, \quad x_2 b \equiv \rho_1 v, \quad x_3 b = 0,$$

где $v = x_1 - \gamma x_2$.

Пусть $x_2 b = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3$. Тогда $(x_2 b)a = -(x_2 a)b = -x_3 b = 0$ и $0 = \rho_1 x_1 a + \rho_2 x_2 a + \rho_3 x_3 = \rho_1\gamma x_3 + \rho_2 x_3$, значит, $\rho_2 = -\rho_1\gamma$ и $x_2 b = \rho_1 v + \rho_3 x_3$.

Пусть $x_1 b = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3$. Тогда $(x_1 b)a = -(x_1 a)b = -\gamma x_3 b = 0$ и $0 = \zeta_1 x_1 a + \zeta_2 x_2 a = \zeta_1\gamma x_3 + \zeta_2 x_3$, откуда $\zeta_2 = -\zeta_1\gamma$ и $x_1 b = \zeta_1 v + \zeta_3 x_3$.

Следовательно,

$$x_1 b = \zeta_1 v + \zeta_3 x_3, \quad x_2 b = \rho_1 v + \rho_3 x_3. \tag{12}$$

Поскольку $vb = x_1 b - \gamma x_2 b \equiv \zeta_1 v - \gamma\rho_1 v = (\zeta_1 - \gamma\rho_1)v \pmod{\Phi x_3}$, то $\zeta_1 = \gamma\rho_1$ и $vb \equiv 0 \pmod{\Phi x_3}$. Отсюда ввиду (12) и пп. 2^0, 3^0 получаем требуемое в п. 4^0.

5^0. Докажем, что $\gamma = 0$. Предположим, что $\gamma \neq 0$.

С одной стороны, $a(x_1 \circ b) = (ax_1)b = x_2 b$, а с другой стороны, на основании п. 4^0

$$a(x_1 \circ b) = a(\mu_2 x_2 + \gamma\rho_1 v) = \mu_2 x_3 + \gamma\rho_1(x_2 - \gamma x_3) \equiv \gamma\rho_1 x_2 \pmod{\Phi x_3}.$$

Значит, $\gamma\rho_1 = 0$, $\rho_1 = 0$ и $x_1 b \equiv 0$, $x_2 b \equiv 0$ ввиду п. 4^0.

Итак, доказано, что $M * A \subseteq M'$, откуда в силу леммы 1 вытекает $M \subseteq M'$; противоречие. Значит, $\gamma = 0$.

6^0. В силу пп. 1^0–5^0 справедливы равенства

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = 0, \quad x_2 a = x_3, \quad x_3 a = 0,$$
$$bx_2 = \mu_2 x_3, \quad bx_3 = x_3 b = 0, \quad x_1 b = \xi_3 x_3, \quad x_2 b = \rho_1 x_1 + \rho_3 x_3.$$

Учитывая эти равенства, имеем

$$(a, b, x_2) = -a(bx_2) = -a\mu_2 x_3 = 0,$$

$$(a, x_2, b) = (ax_2)b - a(x_2 b) = -a(x_2 b) = -a\rho_1 x_1 = -\rho_1 x_2.$$

Отсюда в силу (2) $\rho_1 = 0$ и $M * A \subseteq M'$, что невозможно. Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 вытекает, что справедлива система равенств

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2 + \gamma x_3, \quad x_2 a = x_3 a = 0. \tag{13}$$

3.3. Редукция к случаю $\gamma = 0$ в системе (13). Введем новый базис в M:

$$y_1 = x_1 - \gamma x_2, \quad y_2 = x_2 - \gamma x_3, \quad y_3 = x_3.$$

Имеем

$$ay_1 = ax_1 - \gamma ax_2 = y_2, \quad ay_2 = ax_2 - \gamma ax_3 = x_3 = y_3, \quad ay_3 = 0,$$
$$y_1 a = (x_1 - \gamma x_2)a = -x_2 + \gamma x_3 = -y_2, \quad y_2 a = (x_2 - \gamma x_3)a = 0, \quad y_3 a = 0,$$

т. е.

$$ay_1 = y_2, \quad ay_2 = y_3, \quad ay_3 = 0, \quad y_1 a = -y_2, \quad y_2 a = y_3 a = 0,$$

значит, с точностью до обозначений получаются формулы (13) при $\gamma = 0$.

Итак, справедлива

Лемма 5. *В пространстве M существует базис x_1, x_2, x_3 такой, что выполнена следующая система равенств:*

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0. \tag{14}$$

Попытаемся подобрать элемент $b \in A$, не пропорциональный a, для которого операторы L_b и R_b (действующие на M) имеют наиболее простой вид в подходящем жордановом базисе оператора L_a.

3.4. Действие оператора L_b в базисе x_1, x_2, x_3. Положим

$$bx_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad bx_2 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3.$$

Поскольку $0 = b(x_1 \circ a) = (bx_1)a = \mu_1 x_1 a = -\mu_1 x_2$ в силу (14) и (2), то $\mu_1 = 0$.

Учитывая, что $(bx_2)a = b(x_2 \circ a) = bx_3$, имеем $bx_3 = (bx_2)a = \xi_1 x_1 a = -\xi_1 x_2$. Значит, выполняется следующая система равенств:

$$\begin{gathered} ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0, \\ bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad bx_2 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3, \quad bx_3 = -\xi_1 x_2. \end{gathered} \tag{15}$$

3.5. Одно замечание об элементе bx_3.

Лемма 6. *Параметр ξ_1, участвующий в системе* (15), *отличен от нуля.*

Доказательство. Допустим, что $\xi_1 = 0$; тогда система (15) принимает вид

$$\begin{gathered} ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0, \\ bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad bx_2 = \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3, \quad bx_3 = 0. \end{gathered}$$

Поскольку $bx_2 = \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3, bx_3 = 0$ и оператор L_b нильпотентен, $\xi_2 = 0$ и $bx_2 = \xi_3 x_3$, т. е.

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = 0, \quad x_3 a = 0,$$
$$bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad bx_2 = \xi_3 x_3, \quad bx_3 = 0.$$

В силу правого тождества Муфанг (4)

$$(a, a, bx_1) + (a, b, ax_1) = (a, a, x_1)b + (a, b, x_1)a.$$

Вычислим последовательно все ассоциаторы, входящие в это равенство:

$$(a, a, bx_1) = -a(a(bx_1)) = -a(a(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)) = 0,$$
$$(a, b, ax_1) = -a(bx_2) = -\xi_3 a x_3 = 0,$$
$$(a, a, x_1)b = -x_3 b, \quad (a, b, x_1)a = -(a(bx_1))a = 0,$$

значит, $x_3 * A = 0$. Рассмотрим представление $x_2 b = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3$. Поскольку

$$(x_2 b)a = -(x_2 a)b = 0,$$

то

$$0 = \rho_1 x_1 a + \rho_2 x_2 a + \rho_3 x_3 a = -\rho_1 x_2,$$

т. е. $\rho_1 = 0$ и $x_2 b = \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3$.

Тем самым доказано, что пространство $M' = \mathrm{span}(x_2, x_3)$ инвариантно относительно действий T_b для любого $b \in A$, т. е. $M' * A \subseteq M'$, откуда следует $M * A \subseteq M'$ и в силу леммы 1 $M \subseteq M'$; противоречие. Лемма доказана.

3.6. Подходящие замены базисов. Из последнего равенства системы (15) вытекает

$$b(bx_3) = -\xi_1(bx_2) = -\xi_1(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = -\xi_1^2 x_1 - \xi_1\xi_2 x_2 - \xi_1\xi_3 x_3,$$

значит, с учетом равенства $L_b^3 = 0$ имеем

$$0 = -\xi_1^2 bx_1 - \xi_1\xi_2 bx_2 - \xi_1\xi_3 bx_3 = -\xi_1^2(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)$$
$$- \xi_1\xi_2(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) - \xi_1\xi_3(-\xi_1 x_2) \equiv -\xi_1^2\xi_2 x_1 \pmod{M'},$$

откуда $\xi_1^2\xi_2 = 0$. Отсюда по лемме 6 верно $\xi_2 = 0$ и справедливы соотношения

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0,$$
$$bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad bx_2 = \xi_1 x_1 + \xi_3 x_3, \quad bx_3 = -\xi_1 x_2, \quad \xi_1 \neq 0.$$

Далее, в силу предыдущего верно равенство $b(bx_3) = -\xi_1^2 x_1 - \xi_1\xi_3 x_3$. Умножая обе части этого равенства слева на b и сокращая на $(-\xi_1)$, получаем

$$0 = \xi_1 bx_1 + \xi_3 bx_3 = \xi_1(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) - \xi_3\xi_1 x_2,$$

откуда имеем $\xi_3 = \mu_2$, $\mu_3 = 0$, т. е.

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \qquad x_2 a = x_3 a = 0,$$
$$bx_1 = \mu_2 x_2, \quad bx_2 = \xi_1 x_1 + \mu_2 x_3, \quad bx_3 = -\xi_1 x_2, \quad \xi_1 \neq 0.$$

Заменяя элемент b элементом $\xi_1^{-1} b$ и считая $\mu = \xi_1^{-1}\mu_2$, получаем

$$\begin{gathered} ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0, \\ bx_1 = \mu x_2, \quad bx_2 = x_1 + \mu x_3, \quad bx_3 = -x_2. \end{gathered} \tag{16}$$

Сделаем замену базиса $y_1 = x_1 + \mu x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ (это жорданов базис для L_a); тогда в этих обозначениях формулы (16) принимают вид

$$ay_1 = y_2, \quad ay_2 = y_3, \quad ay_3 = 0, \quad y_1 a = -y_2, \quad y_2 a = y_3 a = 0,$$

$$by_1 = 0, \quad by_2 = y_1, \quad by_3 = -y_2.$$

Следовательно, можно считать, что $A = \mathrm{span}(a, b)$, $M = \mathrm{span}(x_1, x_2, x_3)$ и

$$\begin{gathered} ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0, \\ bx_1 = 0, \quad bx_2 = x_1, \quad bx_3 = -x_2. \end{gathered}$$

3.7. Структура A-бимодуля M. Пусть $x_1 b = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \omega x_3$. Тогда

$$x_2 b = (ax_1)b = a(x_1 \circ b) = a(x_1 b) = \zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_3,$$

$$x_3 b = (ax_2)b = a(x_2 \circ b) = a(x_2 b + bx_2) = a(\zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_3 + x_1) = \zeta_1 x_3 + x_2.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 0 = (x_3 b)b = (\zeta_1 x_3 + x_2)b = \zeta_1 x_3 b + x_2 b \\ = \zeta_1(\zeta_1 x_3 + x_2) + \zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_3 = 2\zeta_1 x_2 + \left(\zeta_1^2 + \zeta_2\right)x_3, \end{aligned}$$

то $\zeta_1 = 0 = \zeta_1^2 + \zeta_2$, значит, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ и выполнены равенства

$$\begin{gathered} ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0, \\ bx_1 = 0, \quad bx_2 = x_1, \quad bx_3 = -x_2, \quad x_1 b = \omega x_3, \quad x_2 b = 0, \quad x_3 b = x_2. \end{gathered}$$

Аналогично $0 = (x_1 b)b = \omega x_3 b = \omega x_2$, откуда $\omega = 0$ и

$$\begin{gathered} ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0, \\ bx_1 = 0, \quad bx_2 = x_1, \quad bx_3 = -x_2, \quad x_1 b = x_2 b = 0, \quad x_3 b = x_2. \end{gathered} \tag{17}$$

Заметим, что в силу (17) M — неприводимый левый A-модуль.

3.8. Произведения нечетных элементов. Вычислим произведения нечетных элементов $x_i x_j$. Будем говорить, что элемент t из M *имеет вес* $\{k, l\}$, если t линейно выражается через векторы x_k, x_l. Из табл. (17) следует, что элементы из пространства $x_1 * A + x_3 * A$ имеют вес $\{2\}$, а элементы из пространства $x_2 * A$ — вес $\{1, 3\}$.

Докажем, что все произведения $x_i x_j$ равны 0, за исключением $x_1 x_2$ и $x_3 x_2$. При этом постоянно будет использоваться тождество (3).

1. Покажем, что $x_2 x_1 = 0$. Поскольку $ax_2 = x_3, bx_2 = x_1$, достаточно понять, что $(x_2 x_1)x_2 = 0$. Имеем $(x_2 x_1)x_2 = x_2^2 x_1 + x_2[x_1, x_2] = x_2^2 x_1$, так как $x_2 A = 0$. Элемент $(x_2 x_1)x_2$ имеет вес $\{1, 3\}$, а элемент $x_2^2 x_1$ — вес $\{2\}$, значит, они оба нулевые. В частности, $x_2 x_1 = 0$ и $x_2^2 = \beta_{22} b$.

2. Покажем, что $x_2^2 = 0$ и $x_2 x_3 = 0$. Имеем $x_2^2 x_3 = (x_2 x_3)x_2 + x_2[x_2, x_3] = (x_2 x_3)x_2$. Элемент $x_2^2 x_3$ имеет вес $\{2\}$, а элемент $(x_2 x_3)x_2$ — вес $\{1, 3\}$. Значит, они нулевые. Тогда $0 = x_2^2 x_3 = \beta_{22} b x_3 = -\beta_{22} x_2$, т. е. $x_2^2 = 0$ и $(x_2 x_3)x_2 = 0$. Поскольку

$$(\forall c \in A) c x_2 = 0 \Leftrightarrow c = 0,$$

то $x_2 x_3 = 0$.

3. Покажем, что $x_1^2 = 0$. Имеем $x_1^2 x_2 = (x_1x_2)x_1 + x_1[x_1, x_2]$. Элемент $x_1^2 x_2$ имеет вес $\{1, 3\}$, а элементы из правой части имеют вес $\{2\}$. Значит, они нулевые. Тогда $x_1^2 = 0$ в силу замечания, приведенного в конце п. 2.

4. Покажем, что $x_1x_3 = 0$. Имеем $(x_1x_2)x_3 = (x_1x_3)x_2 + x_1[x_2, x_3]$. Крайние элементы имеют вес $\{2\}$, а средний — $\{1, 3\}$, значит, $(x_1x_3)x_2 = 0$, откуда и вытекает требуемое.

5. Покажем, что $x_3x_1 = 0$. Поскольку $(x_3x_1)x_2 = (x_3x_2)x_1 + x_3[x_1, x_2]$ и в левой части элемент имеет вес $\{1, 3\}$, а элемент из правой части — вес $\{2\}$, то $(x_3x_1)x_2 = 0$, откуда и следует требуемое равенство.

6. Аналогично предыдущему из $x_3^2 x_2 = (x_3x_2)x_3 + x_3[x_3, x_2]$ вытекает $x_3^2 = 0$.

Тем самым отличными от нуля могут быть только произведения

$$x_1x_2 = \varphi a + \xi b, \quad x_3x_2 = \eta a + \psi b.$$

Покажем, что $\eta = -\xi$. Имеем $x_3(x_1x_2) = x_3[x_1, x_2] = -(x_3x_2)x_1$, значит,

$$x_3(\varphi a + \xi b) = -(\eta a + \psi b)x_1, \quad \xi x_3 b = -\eta a x_1, \quad \xi x_2 = -\eta x_2,$$

откуда и вытекает равенство $\eta = -\xi$. Тогда $x_1x_2 = \varphi a + \xi b$, $x_3x_2 = -\xi a + \psi b$. Отсюда и из (17) следует таблица умножения супералгебры $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$ (указаны только ненулевые произведения):

$$\begin{gathered} ax_1 = x_2, \quad x_1a = -x_2, \quad ax_2 = x_3, \\ bx_2 = x_1, \quad bx_3 = -x_2, \\ x_3b = x_2, \quad x_1x_2 = \varphi a + \xi b, \quad x_3x_2 = -\xi a + \psi b. \end{gathered} \tag{18}$$

3.9. Проверка правой альтернативности супералгебры $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.

I. Вычислим ненулевые ассоциаторы от нечетных элементов. Под степенью ассоциатора мы понимаем его полистепень относительно переменных x_1, x_2, x_3, причем именно в указанном порядке.

1. Ассоциаторы степени $(2, 1, 0)$:

$$(x_1, x_2, x_1) = (x_1x_2)x_1 = (\varphi a + \psi b)x_1 = \varphi x_2,$$

$$(x_1, x_1, x_2) = -x_1(x_1x_2) = -x_1(\varphi a + \psi b) = \varphi x_2.$$

2. Ассоциаторы степени $(0, 1, 2)$:

$$(x_3, x_2, x_3) = (x_3x_2)x_3 = (-\xi a + \psi b)x_3 = \psi b x_3 = -\psi x_2,$$

$$(x_3, x_3, x_2) = -x_3(x_3x_2) = -x_3(-\xi a + \psi b) = -\psi x_3 b = -\psi x_2.$$

3. Ассоциаторы степени $(1, 1, 1)$:

$$(x_3, x_2, x_1) = (x_3x_2)x_1 = (-\xi a + \psi b)x_1 = -\xi a x_1 = -\xi x_2,$$

$$(x_3, x_1, x_2) = -x_3(x_1x_2) = -x_3(\varphi a + \xi b) = -\xi x_3 b = -\xi x_2,$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 = (\varphi a + \xi b)x_3 = -\xi x_2,$$

$$(x_1, x_3, x_2) = -x_1(x_3x_2) = -x_1(-\xi a + \psi b) = \xi x_1 a = -\xi x_2,$$

$$(x_2, x_1, x_3) = 0, \quad (x_2, x_3, x_1) = 0.$$

Ассоциаторы остальных степеней $(2, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 2)$ равны 0.

II. Вычислим ассоциаторы от двух нечетных и одного четного элементов. Сначала рассмотрим ассоциаторы, содержащие элемент a.

1. Степень $(2,0,0)$:

$$(x_1,a,x_1)=-x_2x_1-x_1x_2=-x_1x_2,\quad (x_1,x_1,a)=-x_1(x_1a)=x_1x_2.$$

2. Степень $(1,0,1)$:

$$(a,x_1,x_3)=(a,x_3,x_1)=(x_1,a,x_3)=(x_1,x_3,a)=0,$$
$$(x_3,a,x_1)=-x_3x_2,\quad (x_3,x_1,a)=x_3x_2.$$

Ассоциаторы остальных степеней $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ равны 0.

III. Вычислим ассоциаторы, содержащие элемент b.

1. Ассоциаторы степени $(0,0,2)$:

$$(x_3,b,x_3)=(x_3b)x_3-x_3(bx_3)=x_3x_2,\quad (x_3,x_3,b)=-x_3x_2.$$

2. Ассоциаторы степени $(1,0,1)$:

$$(b,x_1,x_3)=(b,x_3,x_1)=(x_3,b,x_1)=(x_3,x_1,b)=0,$$
$$(x_1,b,x_3)=(x_1b)x_3-x_1(bx_3)=x_1x_2,\quad (x_1,x_3,b)=-x_1(x_3b)=-x_1x_2.$$

Ассоциаторы остальных степеней $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ равны 0.

IV. Вычислим ассоциаторы от двух четных и одного нечетного элементов.

1. Сначала выпишем ассоциаторы, содержащие x_1:

$$\begin{aligned}(x_1,a,a)=(x_1,a,b)=(x_1,b,a)=(x_1,b,b)&\\ =(b,x_1,b)=(b,b,x_1)=(a,x_1,b)=(a,b,x_1)&=0,\end{aligned}$$
$$(a,x_1,a)=x_2a-a(-x_2)=ax_2=x_3,\quad (a,a,x_1)=-ax_2=-x_3,$$
$$(b,x_1,a)=-b(x_1a)=bx_2=x_1,\quad (b,a,x_1)=-b(ax_1)=-bx_2=-x_1.$$

2. Выпишем ассоциаторы, содержащие x_2:

$$\begin{aligned}(x_2,a,a)=(a,x_2,a)=(a,a,x_2)=(x_2,a,b)&\\ =(x_2,b,a)=(x_2,b,b)=(b,x_2,b)=(b,b,x_2)&=0,\end{aligned}$$
$$(a,x_2,b)=(ax_2)b-a(x_2b)=x_3b=x_2,\quad (a,b,x_2)=-a(bx_2)=-ax_1=-x_2,$$
$$(b,x_2,a)=(bx_2)a=x_1a=-x_2,\quad (b,a,x_2)=-b(ax_2)=-bx_3=x_2.$$

3. Выпишем ассоциаторы, содержащие x_3:

$$\begin{aligned}(x_3,a,a)=(a,x_3,a)=(a,a,x_3)=(x_3,a,b)&\\ =(x_3,b,a)=(b,x_3,a)=(b,a,x_3)=(x_3,b,b)&=0,\end{aligned}$$
$$(a,x_3,b)=-a(x_3b)=-ax_2=-x_3,\quad (a,b,x_3)=-a(bx_3)=ax_2=x_3,$$
$$(b,x_3,b)=(bx_3)b-b(x_3b)=-x_2b-bx_2=-x_1,\quad (b,b,x_3)=-b(bx_3)=bx_2=x_1.$$

3.10. Реализация супералгебры $B_{2|3}$ в виде $B_{2|3}(\varphi,\xi,\psi)$. Формулы (18) при $\xi=0$ принимают вид

$$ax_1=x_2,\quad x_1a=-x_2,\quad ax_2=x_3,\quad bx_2=x_1,\quad bx_3=-x_2,$$
$$x_3b=x_2,\quad x_1x_2=\varphi a,\quad x_3x_2=\psi b.$$

Вводя обозначения $a_1=a$, $a_2=b$, $m_1=x_1$, $m_2=-x_2$, $m_3=-x_3$, получаем

$$m_1a_1=x_1a=-x_2=m_2,\quad -a_1m_1=-ax_1=-x_2=m_2,$$
$$m_3a_2=-x_3b=-x_2=m_2,\quad -a_2m_3=-b(-x_3)=bx_3=-x_2=m_2,$$
$$a_1m_2=a(-x_2)=-ax_2=-x_3=m_3,$$
$$a_2m_2=b(-x_2)=-bx_2=-x_1=-m_1,$$
$$m_1m_2=-x_1x_2=-\varphi a=-\varphi a_1=a_1\Leftrightarrow\varphi=-1,$$
$$m_3m_2=x_3x_2=\psi b=\psi a_2=a_2\Leftrightarrow\psi=1.$$

Следовательно, $B_{2|3}=B_{2|3}(-1,0,1)$.

§ 4. Супералгебры вида $B_{2|3}(\varphi,\xi,\psi)$

В этом параграфе докажем, что над алгебраически замкнутым полем всякая сингулярная 5-мерная супералгебра изоморфна $B_{2|3}$. Над полем рациональных чисел существует бесконечно много неизоморфных сингулярных 5-мерных супералгебр.

4.1. Критерий изоморфизма супералгебр $B = B(\varphi, \xi,\psi)$ **и** $B' = B(\varphi',\xi',\psi')$**.** Рассмотрим супералгебру $B(\varphi,\xi,\psi) = A\oplus M$ (для сокращения записи опускаем нижний индекс $_{2|3}$), в которой a_1, a_2 и x_1, x_2, x_3 — базисы в A и M соответственно, и таблицу умножения (указаны только ненулевые произведения базисных элементов):

$$\begin{gathered} a_1x_1 = x_2, \quad x_1a_1 = -x_2, \quad a_1x_2 = x_3, \quad a_2x_2 = x_1, \quad a_2x_3 = -x_2, \\ x_3a_2 = x_2, \quad x_1x_2 = \varphi a_1 + \xi a_2, \quad x_3x_2 = -\xi a_1 + \psi a_2. \end{gathered} \tag{19}$$

Лемма 7. *Простые супералгебры $B = B(\varphi,\xi,\psi)$ и $B' = B(\varphi',\xi',\psi')$ изоморфны тогда и только тогда, когда верно равенство*

$$\omega^2 \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & -\xi \\ -\xi & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' & -\xi' \\ -\xi' & -\psi' \end{pmatrix} \tag{20}$$

для подходящих скаляров α_1, α_2, β_1, β_2, ω таких, что $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 1$ *и* $\omega \neq 0$.

Доказательство. Пусть супералгебры B и B' изоморфны. Тогда в супералгебре B с таблицей умножения (19) имеется базис b_1, b_2, y_1, y_2, y_3, в котором таблица умножения имеет вид

$$\begin{gathered} b_1y_1 = y_2, \quad y_1b_1 = -y_2, \quad b_1y_2 = y_3, \quad b_2y_2 = y_1, \quad b_2y_3 = -y_2, \\ y_3b_2 = y_2, \quad y_1y_2 = \varphi' b_1 + \xi' b_2, \quad y_3y_2 = -\xi' b_1 + \psi' b_2. \end{gathered} \tag{21}$$

Поскольку

$$\{n\in M \mid nM = 0\} = \Phi x_2, \quad \{m \in M \mid Mm = 0\} = \mathrm{span}(x_1,x_3),$$

то $\Phi x_2 = \Phi y_2$ и $\mathrm{span}(x_1,x_3) = \mathrm{span}(y_1,y_3)$, т. е.

$$y_2 = \omega x_2,\ y_1 = \lambda_1x_1 + \lambda_3x_3,\ y_3 = \mu_1x_1 + \mu_3x_3 \quad \text{и} \quad \omega\neq 0,\ \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть $b_1 = \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2$, $b_2 = \beta_1a_1 + \beta_2a_2$. Вычислим координаты векторов y_1, y_3. Так как $b_1y_2 = y_3$, $b_2y_2 = y_1$, то

$$\begin{gathered} \mu_1x_1 + \mu_3x_3 = y_3 = b_1y_2 = (\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2)\omega x_2 = \alpha_1\omega x_3 + \alpha_2\omega x_1, \\ \lambda_1x_1 + \lambda_3x_3 = y_1 = b_2y_2 = (\beta_1a_1 + \beta_2a_2)\omega x_2 = \beta_1\omega x_3 + \beta_2\omega x_1, \end{gathered}$$

откуда

$$\mu_1 = \alpha_2\omega,\ \mu_3 = \alpha_1\omega, \quad \lambda_1 = \beta_2\omega,\ \lambda_3 = \beta_1\omega.$$

Тогда

$$\begin{gathered} b_1 = \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2, \quad b_2 = \beta_1a_1 + \beta_2a_2, \\ y_1 = \omega(\beta_2x_1 + \beta_1x_3), \quad y_2 = \omega x_2, \quad y_3 = \omega(\alpha_2x_1 + \alpha_1x_3). \end{gathered}$$

Аналогично каждое из равенств $b_1y_1 = y_2$, $y_1b_1 = -y_2$, $b_2y_3 = -y_2$, $y_3b_2 = y_2$, как легко проверить, приводит к соотношению

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1. \tag{22}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} b_1y_1 = y_2 \Leftrightarrow (\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2)\omega(\beta_2x_1 + \beta_1x_3) = \omega x_2 \\ \Leftrightarrow (\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2)(\beta_2x_1 + \beta_1x_3) = x_2 \\ \Leftrightarrow \alpha_1a_1\beta_2x_1 + \alpha_2a_2\beta_1x_3 = x_2 \Leftrightarrow \alpha_1\beta_2x_2 - \alpha_2\beta_1x_2 = x_2. \end{aligned}$$

Никаких других соотношений, кроме (22), из равенств первых двух типов в (21) не получается (имеются в виду всевозможные произведения вида $b_i * y_j$), следовательно,

$$b_1 = \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2, \quad b_2 = \beta_1a_1 + \beta_2a_2,$$
$$y_1 = \omega(\beta_2x_1 + \beta_1x_3), \quad y_2 = \omega x_2, \quad y_3 = \omega(\alpha_2x_1 + \alpha_1x_3), \quad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1.$$

Наконец, рассмотрим произведения нечетных элементов:

$$\begin{aligned} y_1y_2 = \varphi'b_1 + \xi'b_2 \Leftrightarrow \omega^2(\beta_2x_1 + \beta_1x_3)x_2 = \varphi'(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2) + \xi'(\beta_1a_1 + \beta_2a_2) \\ \Leftrightarrow \omega^2\beta_2x_1x_2 + \omega^2\beta_1x_3x_2 = (\varphi'\alpha_1 + \xi'\beta_1)a_1 + (\varphi'\alpha_2 + \xi'\beta_2)a_2 \\ \Leftrightarrow \omega^2\beta_2(\varphi a_1 + \xi a_2) + \omega^2\beta_1(-\xi a_1 + \psi a_2) = (\varphi'\alpha_1 + \xi'\beta_1)a_1 + (\varphi'\alpha_2 + \xi'\beta_2)a_2 \\ \Leftrightarrow \omega^2(\beta_2\varphi - \beta_1\xi)a_1 + \omega^2(\beta_2\xi + \beta_1\psi)a_2 = (\varphi'\alpha_1 + \xi'\beta_1)a_1 + (\varphi'\alpha_2 + \xi'\beta_2)a_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3y_2 = -\xi'b_1 + \psi'b_2 \Leftrightarrow \omega^2(\alpha_2x_1 + \alpha_1x_3)x_2 = -\xi'(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2) + \psi'(\beta_1a_1 + \beta_2a_2) \\ \Leftrightarrow \omega^2\alpha_2x_1x_2 + \omega^2\alpha_1x_3x_2 = -\xi'\alpha_1a_1 - \xi'\alpha_2a_2 + \psi'\beta_1a_1 + \psi'\beta_2a_2 \\ \Leftrightarrow \omega^2\alpha_2(\varphi a_1 + \xi a_2) + \omega^2\alpha_1(-\xi a_1 + \psi a_2) = -\xi'\alpha_1a_1 - \xi'\alpha_2a_2 + \psi'\beta_1a_1 + \psi'\beta_2a_2 \\ \Leftrightarrow \omega^2(\alpha_2\varphi - \alpha_1\xi)a_1 + \omega^2(\alpha_2\xi + \alpha_1\psi)a_2 = (-\xi'\alpha_1 + \psi'\beta_1)a_1 + (-\xi'\alpha_2 + \psi'\beta_2)a_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega^2(\beta_2\varphi - \beta_1\xi) = (\varphi'\alpha_1 + \xi'\beta_1), \quad -\omega^2(\beta_2\xi + \beta_1\psi) = -(\varphi'\alpha_2 + \xi'\beta_2),$$
$$\omega^2(\alpha_2\varphi - \alpha_1\xi) = (-\xi'\alpha_1 + \psi'\beta_1), \quad -\omega^2(\alpha_2\xi + \alpha_1\psi) = (\xi'\alpha_2 - \psi'\beta_2).$$

Эти равенства эквивалентны матричному равенству

$$\omega^2\begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi & -\xi \\ -\xi & -\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' & -\xi' \\ -\xi' & -\psi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

которое эквивалентно равенству (20). Лемма доказана.

4.2. Теорема 2 и следствия из нее. Из леммы 7 и эквивалентности форм $\varphi t^2 + 2\xi ts + \psi s^2$ и $\varphi t^2 - 2\xi ts + \psi s^2$ немедленно вытекает теорема 2 (см. введение). Ее результат является аналогом теоремы Джекобсона для алгебр Кэли — Диксона (см. [6, с. 70]).

Следствие 1. *Супералгебры* $B(\varphi, 0, 1)$, $B(\varphi', 0, 1)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда уравнение* $t^4 = \varphi'\varphi^{-1}$ *разрешимо в поле* Φ. *В частности, над* *полем рациональных чисел имеется бесконечно много неизоморфных сингулярных* 5*-мерных супералгебр.*

Доказательство. В самом деле, в силу (23) верно

$$
\begin{aligned}
&B(\varphi,0,1) \cong B(\varphi',0,1)\\
&\quad\Leftrightarrow \omega^2 \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}\\
&\quad\Leftrightarrow \omega^2 \begin{pmatrix} \beta_2\varphi & -\beta_1 \\ \alpha_2\varphi & -\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\varphi' & -\alpha_2\varphi' \\ \beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}\\
&\quad\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2\beta_2\varphi = \alpha_1\varphi', & \omega^2\beta_1 = \alpha_2\varphi', \\ \beta_1 = \omega^2\alpha_2\varphi, & \beta_2 = \omega^2\alpha_1. \end{cases} \Leftrightarrow \varphi' = \omega^4\varphi.
\end{aligned}
$$

Следствие 2. *Всякая сингулярная* 5*-мерная супералгебра над алгебраически замкнутым полем изоморфна супералгебре* $B_{2|3}$.

Доказательство. Известно [9], что над алгебраически замкнутым полем всякая невырожденная квадратичная форма эквивалентна сумме квадратов, следовательно, с точностью до изоморфизма имеется единственная сингулярная 5-мерная супералгебра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Silva J. P., Murakami L. S. I., Shestakov I. P.* On right alternative superalgebras // Commun. Algebra. 2016. V. 44, N 1. P. 240–252.
2. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
3. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с унитарной четной частью над полем характеристики 0 // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 577–585.
4. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль // Изв. РАН. Сер. мат. 2015. Т. 79, № 3. С. 131–158.
5. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Простые конечномерные правоальтернативные унитальные супералгебры с ассоциативно-коммутативной четной частью // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2016. № 8. С. 82–84.
6. *Schafer R. D.* An introduction to nonassociative algebras. New York: Acad. Press, 1966.
7. *Пчелинцев С. В.* Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 1. С. 183–206.
8. *Albert A. A.* On right alternative algebras // Ann. Math. 1949. V. 50, N 2. P. 318–328.
9. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.

Статья поступила 27 февраля 2017 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва 123468;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
pchelinzev@mail.ru

Шашков Олег Владимирович
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва 123468
o.v.shashkov@yandex.ru