

УДК 517.968.2

О НЕОДНОРОДНОМ КОНСЕРВАТИВНОМ УРАВНЕНИИ ВИНЕРА — ХОПФА

М. С. Сгибнев

Аннотация. Доказано существование решения неоднородного обобщенного уравнения Винера — Хопфа, ядром которого является распределение вероятностей, порождающее случайное блуждание, уходящее в $-\infty$. Установлены асимптотические свойства решения в зависимости от соответствующих свойств свободного члена уравнения и его ядра.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.618

Ключевые слова: интегральное уравнение, неоднородное обобщенное уравнение Винера — Хопфа, распределение вероятностей, уход в минус бесконечность, асимптотическое поведение.

§ 1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$z(x) = \int_{-\infty}^x z(x-y) F(dy) + f(x), \quad x > 0, \quad (1)$$

где $z(x)$ — неизвестная функция, F — заданное распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ и $f(x)$ — известная функция. Если распределение F абсолютно непрерывно, т. е. если $F(dy) = k(y) dy$, то уравнение (1) эквивалентно классическому неоднородному уравнению Винера — Хопфа

$$z(x) = \int_0^{\infty} k(x-y) z(y) dy + f(x), \quad x > 0. \quad (2)$$

Опишем класс распределений вероятностей F , для которых в настоящей работе будет доказано существование решения уравнения (1), найден его явный вид и установлены его асимптотические свойства. Пусть X_k , $k \geq 1$, — независимые случайные величины с одним и тем же распределением F , не сосредоточенным в нуле. Эти величины порождают случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Согласно теореме 1 [1, гл. XII, § 2] существуют только два типа случайных блужданий: 1) осциллирующий тип (S_n колеблется с вероятностью единица между $-\infty$ и $+\infty$); 2) уходящий тип (с вероятностью единица S_n стремится либо к $-\infty$, либо к $+\infty$). Случайное блуждание $\{S_n\}$ уходит в $-\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{P}(S_n > 0) < \infty \quad (3)$$

(см. [1, гл. XII, § 7, теорема 2]). Если существует математическое ожидание $EX_1 := \int_{\mathbb{R}} x F(dx)$, то согласно закону больших чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n = EX_1$ почти наверно (см. [2, предложение IV.7.1]); таким образом, при $EX_1 < 0$ случайное блуждание уходит в $-\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [1, гл. XII, § 7, теорема 2]). Распределение вероятностей G на $\mathbb{R}$ называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек вида $0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$. Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* распределения G . Распределение, не являющееся арифметическим, называется *неарифметическим*.

Будем изучать уравнение (1) с произвольным неарифметическим распределением вероятностей F , порождающим случайное блуждание, уходящее в $-\infty$.

Пусть ν и $\varkappa$ — конечные меры, определенные на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств прямой $\mathbb{R}$. Их *сверткой* назовем меру

$$\nu * \varkappa(A) := \iint_{\{x+y \in A\}} \nu(dx) \varkappa(dy) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A-x) \varkappa(dx), \quad A \in \mathcal{B};$$

здесь $A-x := \{y \in \mathbb{R} : x+y \in A\}$. Обозначим через F^{n*} n -кратную свертку распределения F :

$$F^{1*} := 1, \quad F^{(n+1)*} := F^{n*} * F, \quad n \geq 1,$$

и $F^{0*} := \delta_0$ (атомическая мера единичной массы, сосредоточенная в нуле). Так как F^{n*} — распределение случайной величины S_n , условие (3) можно записать в терминах самого распределения F следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{n*}((0, \infty))}{n} < \infty. \quad (4)$$

В то время как уравнению (2) посвящена обширная литература, уравнение (1) остается малоизученным. Отметим работу [3], где исследовались вопросы существования и единственности решения уравнения (1), в котором, как будет показано ниже, распределение F удовлетворяет условию (4). Сравнение результатов настоящей статьи и работы [3] проведено в § 7.

Для произвольной комплекснозначной меры ν определим ее *преобразование Лапласа* по формуле $\hat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \nu(dx)$ для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры ν .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть F — распределение вероятностей на $\mathbb{R}$. Мера

$$U := \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}$$

называется *мерой восстановления*, порожденной распределением F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [1, гл. VI, § 10]). Распределение вероятностей F (и порождаемое им случайное блуждание) называется *невозвратным*, если $U(I) < \infty$ для всех конечных интервалов I , и *возвратным* в противном случае.

Если неарифметическое распределение F возвратно, то число попаданий порождаемого им случайного блуждания в каждый конечный интервал бесконечно с вероятностью единица (см. [1, гл. VI, § 10, теорема 3]). Поэтому блуждания уходящего типа невозвратны.

§ 2. Существование решения

Рассмотрим уравнение (1), в котором $f \in L_1(0, \infty)$. В этом случае сочетание известных результатов из вероятностной теории восстановления и метода последовательных приближений позволяет установить существование решения данного уравнения.

Доопределим функцию $f(x)$, полагая $f(x) \equiv 0$ на $(-\infty, 0]$. В дальнейшем это соглашение будет действовать на протяжении всей статьи, каковы бы ни были условия, налагаемые на неоднородный член $f(x)$ в последующих теоремах.

Теорема 1. Пусть F — распределение вероятностей на $\mathbb{R}$, принадлежащее к уходящему в $-\infty$ типу, и пусть $f \in L_1(0, \infty)$. Тогда существует почти всюду (п.в.) конечное решение $z(x)$ уравнения (1), для которого справедлива равномерная оценка

$$\sup_{a>0} \int_a^{a+h} |z(x)| dx \leq C(h) \|f\|_1 < \infty,$$

где $C(h) < \infty$ при любом $h > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться в существовании решения $z(x)$ для неотрицательных функций $f \in L_1(0, \infty)$; в случае вещественнозначных функций f следует воспользоваться представлением $f = f^+ - f^-$ в виде разности положительной и отрицательной частей ($f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := -\min(f, 0)$), а для комплекснозначных f — в виде $f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)$. Например, тогда $z(x) = z_+(x) - z_-(x)$, где $z_{\pm}(x)$ — два решения уравнения (1) с функциями $f^{\pm}(x)$ вместо $f(x)$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение восстановления

$$\zeta(x) = \int_{\mathbb{R}} \zeta(x-y) F(dy) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Уравнение (5) хорошо изучено для распределений, порождающих случайные блуждания S_n , уходящие в $+\infty$; в частности, когда $ES_1 \in (0, +\infty]$. Не представляет труда переформулировать соответствующие результаты для рассматриваемого случая, когда распределение порождает случайное блуждание, уходящее в $-\infty$. Достаточно заметить, что распределение $G(A) := F(-A)$, $A \in \mathcal{B}$, порождает случайное блуждание, уходящее в $+\infty$; здесь $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Этим замечанием будем неоднократно пользоваться в дальнейшем, не оговаривая этого особо.

Построим решения уравнений (1) и (5) по методу последовательных приближений:

$$z_0(x) = f(x), \quad z_n(x) = \int_{-\infty}^x z_{n-1}(x-y) F(dy) + f(x), \quad x > 0, \quad (6)$$

$$\zeta_0(x) = f(x), \quad \zeta_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \zeta_{n-1}(x-y) F(dy) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}; \quad (7)$$

здесь $n = 1, 2, \dots$. Очевидно, что $z_n(x) \uparrow$, $\zeta_n(x) \uparrow$ при $n \uparrow$. Тогда по теореме о монотонной сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла в равенствах (6), (7). Таким образом, пределы $z(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x)$ и $\zeta(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n(x)$

суть решения уравнений (1) и (5) соответственно, причем $z(x) \leq \zeta(x)$ при всех $x > 0$.

Определим свертку $\varkappa * g(x)$ меры $\varkappa$ и функции $g(x)$:

$$\varkappa * g(x) := \int_{\mathbb{R}} g(x-y) \varkappa(dy), \quad x \in \mathbb{R},$$

при условии, что данный интеграл имеет смысл. Функцию $\zeta(x)$ можно представить в виде $\zeta(x) = U * f(x)$. Покажем, что функция $\zeta(x)$ (а вместе с ней и $z(x)$) локально интегрируема и потому конечна п.в. Рассмотрим конечную меру G с плотностью $f(x)$. Известно (см. [1, гл. VI, § 10, теорема 1]), что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} U([x, x+h]) \leq U([-2h, 2h]) < \infty.$$

Для ограниченного $A \in \mathcal{B}$ положим

$$U * G(A) := \iint_{\{x+y \in A\}} U(dx) G(dy) = \int_{\mathbb{R}} U(A-x) G(dx),$$

откуда вытекает, что

$$U * G([a, a+h]) \leq U([-2h, 2h])G(\mathbb{R}) = U([-2h, 2h])\|f\|_1 < \infty,$$

причем оценка равномерна по $a \in \mathbb{R}$. Мы установили, что мера $U * G$ конечна на ограниченных интервалах, откуда вытекает, что ее плотность конечна п.в. Покажем, что она равна $\zeta(x) = U * f(x)$. Для ограниченного $A \in \mathcal{B}$ имеем

$$\begin{aligned} U * G(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(A-x) U(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A-x}^{\infty} f(y) dy U(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_A(x+y) f(y) dy U(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_A(u) f(u-x) du U(dx) \\ &= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f(u-x) U(dx) du = \int_A U * f(u) du. \end{aligned}$$

Следствием вышеизложенного является оценка

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \int_a^{a+h} \zeta(x) dx \leq U([-2h, 2h])\|f\|_1.$$

Таким образом, доказано существование конечного п.в. решения $z(x)$ уравнения (1), причем справедлива оценка

$$\sup_{a > 0} \int_a^{a+h} |z(x)| dx \leq U([-2h, 2h])\|f\|_1 < \infty$$

даже в том случае, когда неоднородный член f этого уравнения является вещественнозначной функцией. Это вытекает из равенств $z(x) = z_+(x) - z_-(x)$

и $\|f\|_1 = \|f^+\|_1 + \|f^-\|_1$, где $z_+(x)$, $z_-(x)$ — решения уравнения (1), соответствующие неоднородным членам f^+ , f^- . Для комплекснозначных функций f указанный супремум оценивается величиной $2U([-2h, 2h])\|f\|_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $f \geq 0$, то решение $z(x)$ уравнения (1), полученное методом последовательных приближений при доказательстве теоремы 1, очевидно, является минимальным неотрицательным решением уравнения (1); иными словами, если $z^*(x) \geq 0$ — другое решение уравнения (1), то $z^*(x) \geq z(x)$ п.в. Всюду в дальнейшем $z(x)$ будет обозначать решение уравнения (1), найденное в теореме 1.

§ 3. Явный вид решения уравнения (1)

Положим $\mathcal{T}_+ := \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}$. Случайная величина $\mathcal{H}_+ := S_{\mathcal{T}_+}$ называется *первой строго возрастающей лестничной высотой*. Аналогично $\mathcal{T}_- := \min n \geq 1 : S_n \leq 0$ и $\mathcal{H}_- := S_{\mathcal{T}_-}$ — *первая слабо убывающая лестничная высота*. Обозначим через F_+ и F_- распределения случайных величин $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ соответственно. Справедливо факторизационное тождество (см. [1, гл. XVIII, § 3]):

$$1 - z\hat{F}(s) = [1 - E(z^{\mathcal{T}_-} e^{s\mathcal{H}_-})][1 - E(z^{\mathcal{T}_+} e^{s\mathcal{H}_+})], \quad |z| \leq 1, \quad \operatorname{Re} s = 0. \quad (8)$$

Из тождества (8) вытекает равенство

$$\delta_0 - F = (\delta_0 - F_-) * (\delta_0 - F_+). \quad (9)$$

Пусть $\overline{\mathcal{T}}_+ := \min\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}$. Случайная величина $\overline{\mathcal{H}}_+ := S_{\overline{\mathcal{T}}_+}$ называется *первой слабо возрастающей лестничной высотой*. Как известно (см. [1, гл. XVIII, § 4, пример а)), уход случайного блуждания $\{S_n\}$ к $+\infty$ имеет место, когда распределение F_- , сосредоточенное на $(-\infty, 0]$, несобственное, т. е. когда $F_-((-\infty, 0]) < 1$. В рассматриваемом случае, когда случайное блуждание уходит в $-\infty$, распределение $\overline{F}_+$ случайной величины $\overline{\mathcal{H}}_+$ несобственное по соображениям симметрии. Справедливо равенство $\overline{F}_+ = \zeta\delta_0 + (1 - \zeta)F_+$, где $\zeta \in [0, 1)$ (см. [1, гл. XII, § 1, формула (1.10)]), откуда следует, что распределение F_+ в нашем случае несобственное. Этот факт будет использоваться в дальнейшем.

Пусть $U_- := \sum_{n=0}^{\infty} F_-^{n*}$ — мера восстановления, порожденная распределением

$$F_-.$$

Напомним, что $U_- * f(x) = \int_{-\infty}^{0+} f(x-y) U_-(dy)$, $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. Пусть F — распределение вероятностей на $\mathbb{R}$, порождающее случайное блуждание $\{S_n\}$, уходящее в $-\infty$, и пусть $f \in L_1(0, \infty)$. Тогда решение $z(x)$ уравнения (1), полученное в теореме 1, представимо в виде

$$z(x) = U * \{f - (\delta_0 - F_-) * [(U_- * f)|_{(-\infty, 0]})\}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [4] кратко изложена формальная схема решения классического уравнения Винера — Хопфа (см. уравнение (2)). По аналогии с первым шагом этой схемы запишем наше уравнение (1) на всей прямой. Пусть

$$v(x) = \begin{cases} z(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases} \quad n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ -\int_{-\infty}^x z(x-y) F(dy) & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где $z(x)$ — решение уравнения (1), существование которого доказано в теореме 1. Определенная таким образом функция $n(x)$ имеет смысл. Действительно, предполагая для простоты $f(x) \geq 0$, имеем при $x \leq 0$

$$\int_{-\infty}^x z(x-y) F(dy) \leq \int_{-\infty}^x \zeta(x-y) F(dy) \leq \int_{\mathbb{R}} \zeta(x-y) F(dy) = \zeta(x).$$

Итак, уравнение (1) эквивалентно следующему уравнению восстановления на всей прямой:

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}} v(x-y) F(dy) + f(x) + n(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

или, в другой записи,

$$(\delta_0 - F) * v(x) = f(x) + n(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (10)$$

Образует свертки меры восстановления U_- с обеими частями уравнения (10). Имеет место равенство $U_- * (\delta_0 - F_-) = \delta_0$, вытекающее из очевидного тождества $\widehat{U}_-(s)[1 - \widehat{F}_-(s)] \equiv 1$, $\operatorname{Re} s > 0$. Учитывая соотношение (9), получаем

$$(\delta_0 - F_+) * v(x) = U_- * (f + n)(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (11)$$

Мера U_- неотрицательна и сосредоточена на $(-\infty, 0]$. Левая часть равенства (11) обращается тождественно в нуль на $(-\infty, 0]$. Следовательно,

$$[U_- * (f + n)]|_{(-\infty, 0]}(x) \equiv 0,$$

откуда вытекает, что $U_- * n(x) = -(U_- * f)|_{(-\infty, 0]}(x)$, $x \leq 0$. Образует свертки обеих частей этого равенства с мерой $\delta_0 - F_-$. Получаем

$$n(x) = -(\delta_0 - F_-) * [(U_- * f)|_{(-\infty, 0]}](x).$$

Тем самым решение уравнения (10) найдено:

$$v(x) = U * (f + n)(x) = U * \{f - (\delta_0 - F_-) * [(U_- * f)|_{(-\infty, 0]}]\}(x), \quad (12)$$

а вместе с ним найдено и решение $z(x)$ исходного уравнения (1).

§ 4. Асимптотическое поведение решения

«Минимальное» решение $z(x)$ уравнения (1), существование которого установлено в § 2 и явный вид которого получен в § 3, не является единственным решением уравнения (1) при сделанных предположениях относительно распределения F — ядра уравнения (1). Рассмотрим однородное уравнение

$$Z(x) = \int_{-\infty}^x Z(x-y) F(dy), \quad x > 0, \quad (13)$$

где $Z(x)$ — неизвестная функция, а F — неарифметическое распределение вероятностей, порождающее случайное блуждание $\{S_n\}$, уходящее в $-\infty$. С вероятностью единица определена конечнозначная случайная величина $\sup_{n \geq 0} S_n$. Ее функция распределения $M(x) := P(\sup_{n \geq 0} S_n \leq x)$ удовлетворяет уравнению (13)

(см. [1, гл. XII, § 3а, пример с]) и обладает очевидным свойством: $M(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Функция $Z_c(x) := z(x) + cM(x)$, где $c \in \mathbb{R}$ или $c \in \mathbb{C}$, является решением уравнения (1). Мы рассмотрим асимптотику этого решения в § 6. Здесь остановимся на асимптотическом поведении «минимального» решения $z(x)$.

Пусть F — распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ такое, что

$$\mu := \int_{-\infty}^{\infty} x F(dx) \in (0, \infty]$$

и m -кратная свертка F^{m*} при некотором $m \geq 1$ содержит ненулевую абсолютно непрерывную компоненту. Для $c \in \mathbb{R}$ полагаем отношение c/∞ равным нулю. Стоун [5] показал, что мера восстановления U , порожденная распределением F , допускает разложение $U = U_1 + U_2$, где U_1 — абсолютно непрерывная мера с ограниченной непрерывной плотностью $u(x)$ такой, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1/\mu$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$, а U_2 — конечная мера (см. также [6, теорема 2.6.2]).

Рассмотрим уравнение восстановления

$$\zeta(x) = \int_{\mathbb{R}} \zeta(x-y) F(dy) + g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

где $g \in L_1(\mathbb{R})$. Как отмечено в [7] и показано в [6, теорема 2.6.4], справедлива следующая *ключевая теорема восстановления*, которую мы формулируем здесь симметричным образом для *отрицательных* средних μ : если функция $g \in L_1(\mathbb{R})$ ограничена и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$, то

$$\zeta(t) = U * g(t) \rightarrow \begin{cases} |\mu|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx, & t \rightarrow -\infty, \\ 0, & t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

В дальнейшем понадобится следующая

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$U(A) = U_+ * U_-(A), \quad A \in \mathcal{B}, \quad (14)$$

где $U_+ := \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{n*}$ — мера восстановления, порожденная распределением F_+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лестничные величины $\mathcal{T}_{\pm}$ и $\mathcal{H}_{\pm}$ определены в начале § 3. Обратимся к тождеству (8). При $z \in (0, 1)$ выражения $E(z^{\mathcal{T}_-} e^{s\mathcal{H}_-})$ и $E(z^{\mathcal{T}_+} e^{s\mathcal{H}_+})$ как функции от s являются преобразованиями Лапласа конечных неотрицательных мер. Эти меры сосредоточены на $(-\infty, 0]$ и $(0, \infty)$ соответственно. Переходя к обратным величинам в тождестве (8) и разлагая их в ряд, получаем следующее соотношение для соответствующих геометрических прогрессий:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \widehat{F}^k(s) = \sum_{k=0}^{\infty} E^k(z^{\mathcal{T}_+} e^{s\mathcal{H}_+}) \sum_{k=0}^{\infty} E^k(z^{\mathcal{T}_-} e^{s\mathcal{H}_-}). \quad (15)$$

Пусть $\{(\mathcal{T}_k^+, \mathcal{H}_k^+)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых двумерных случайных величин, распределенных как $(\mathcal{T}_+, \mathcal{H}_+)$. Образует двумерное случайное блуждание $\{(V_n^+, W_n^+)\}_{n=0}^{\infty}$, полагая

$$(V_0^+, W_0^+) := (0, 0), \quad (V_n^+, W_n^+) := \sum_{k=1}^n (\mathcal{T}_k^+, \mathcal{H}_k^+), \quad n \geq 1.$$

Тогда при $k \geq 1$ выражение $E^k(z^{\mathcal{T}_+} e^{s\mathcal{H}_+}) = E(z^{V_k^+} e^{sW_k^+})$ является преобразованием Лапласа конечной меры

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n P(V_k^+ = n, W_k^+ \in A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Аналогично $E^k(z^{\mathcal{T}_-} e^{s\mathcal{H}_-})$ — преобразование Лапласа конечной меры

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n P(V_k^- = n, W_k^- \in A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Переходя в (15) от преобразований Лапласа к мерам и устремляя $z \uparrow 1$, получаем (14).

Теорема 3. *Предположим, что F — распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ такое, что $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x F(dx) \in [-\infty, 0)$ и m -кратная свертка F^{m*} при некотором $m \geq 1$ содержит ненулевую абсолютно непрерывную компоненту. Если функция $f \in L_1(0, \infty)$ ограничена и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, то решение $z(x)$ уравнения (1) удовлетворяет соотношению $z(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\mathcal{H}_-$ — первая слабо убывающая лестничная высота случайного блуждания $\{S_n\}$ (см. начало § 3). Положим $\mu_- := E\mathcal{H}_-$. Если μ конечно и отрицательно, то μ_- также конечно и отрицательно (см. симметричный вариант для отрицательных средних μ в [1, гл. XII, § 2, теорема 2]). Так как случайное блуждание $\{S_n\}$ уходит в $-\infty$, то $\mathcal{H}_-$ — собственная случайная величина. Очевидно, что $\mathcal{H}_- \leq S_1 = X_1$ почти наверное. Следовательно, $\mu_- \leq \mu$. Таким образом, если $\mu = -\infty$, то и $\mu_- = -\infty$.

Обратимся к равенству (12). Согласно лемме 1 при $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} z(x) &= v(x) = U * f(x) - U_+ * U_- * (\delta_0 - F_-) * [(U_- * f)|_{(-\infty, 0]}(x) \\ &= U * f(x) - U_+ * [(U_- * f)|_{(-\infty, 0]}(x) \\ &= U * f(x) - U_+ * U_- * f(x) + U_+ * (U_- * f)|_{(0, \infty)}(x) \\ &= U_+ * (U_- * f)|_{(0, \infty)}(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Распределение F_- обладает таким же свойством, что и распределение F : m -кратная свертка F_-^{m*} при некотором $m \geq 1$ содержит ненулевую абсолютно непрерывную компоненту (см. [8, теорема 2]). Согласно приведенной в начале этого параграфа ключевой теореме восстановления (в которой вместо U и g следует взять U_- и f соответственно) имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (U_- * f)|_{(0, \infty)}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} U_- * f(x) = 0.$$

Из разложения Стоуна для меры U_- легко вытекает ограниченность функции $U_- * f(x)$. Действительно, пусть $U_- = U_1 + U_2$, где U_1 — σ -конечная мера с ограниченной непрерывной плотностью $u_1(x)$ такой, что $u_1(x) \rightarrow 1/|\mu|$ при $x \rightarrow -\infty$ и $u_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, а U_2 — конечная мера. Имеем

$$U_- * f(x) = U_1 * f(x) + U_2 * f(x),$$

$$|U_1 * f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_1(x)| \|f\|_1 < \infty, \quad |U_2 * f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| U_2(\mathbb{R}) < \infty,$$

что и требовалось.

Так как распределение F_+ несобственное ($F_+((0, \infty)) < 1$), мера восстановления U_+ конечна: $U_+([0, \infty)) = [1 - F_+((0, \infty))]^{-1}$. Следовательно, свертка $U_+ * (U_- * f)|_{(0, \infty)}(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ согласно теореме о мажорируемой сходимости. Теорема доказана.

§ 5. Оценка скорости сходимости

Оценим скорость сходимости в теореме 3. С этой целью обратимся к соответствующей оценке в ключевой теореме восстановления [9, теорема 5.1]. Воспроизведем ниже формулировку этой теоремы для удобства ее применения (см. теорему 4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}(\mathbb{R}_+)$, называется *полумультипликативной*, если она конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in \mathbb{R}(\mathbb{R}_+)$. Для полумультипликативных функций, определенных на всей прямой, имеют место следующие соотношения [10, теорема 7.6.2]:

$$\begin{aligned} -\infty < r_-(\varphi) &:= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \sup_{x < 0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} \\ &\leq \inf_{x > 0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} =: r_+(\varphi) < \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

В дальнейшем $\varphi(x)$ будет всегда обозначать полумультипликативную функцию. Следующие примеры полумультипликативных функций на $\mathbb{R}_+$ иллюстрируют широту понятия полумультипликативности: $\varphi(x) = (x+1)^r$, $r > 0$; $\varphi(x) = \exp(cx^\beta)$, где $c > 0$ и $0 < \beta < 1$; $\varphi(x) = \exp(r_+x)$, r_+ вещественно. В первых двух случаях $r_+(\varphi) = 0$, в то время как в последнем $r_+(\varphi) = r_+$. Произведение конечного числа полумультипликативных функций снова является полумультипликативной функцией. Пусть $R(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, — положительная, начиная с некоторого места неубывающая, правильно меняющаяся на бесконечности функция с неотрицательным показателем β , т. е. $R(tx)/R(x) \rightarrow t^\beta$ для $t > 0$, когда $x \rightarrow \infty$ (см. [1, § VIII.8]). Тогда найдутся полумультипликативная функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, и $x_0 \in (0, \infty)$ такие, что $c_1 R(x) \leq \varphi(x) \leq c_2 R(x)$ при всех $x \geq x_0$, где c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные (см. [11, предложение]).

Обозначим через $S(\varphi)$ совокупность всех комплекснозначных σ -конечных мер ν , определенных на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств прямой $\mathbb{R}$, таких, что $\|\nu\|_\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) |\nu|(dx) < \infty$. Совокупность $S(\varphi)$ — банахова алгебра с нормой $\|\cdot\|_\varphi$; операцией умножения элементов ν и κ из $S(\varphi)$ служит их свертка $\nu * \kappa$, а единицей — мера δ_0 . (Теория банаховых алгебр $S(\varphi)$ для мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$, изложена в [10, гл. 4].) Из (17) вытекает, что преобразование Лапласа $\hat{\nu}(s)$ произвольной меры $\nu \in S(\varphi)$ абсолютно сходится относительно полной вариации $|\nu|$ при $r_-(\varphi) \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)$.

Определим оператор T , действующий в пространстве всех конечных мер. Пусть ν — конечная комплекснозначная мера. Обозначим через $T\nu$ σ -конечную меру с плотностью

$$v(x; \nu) := \begin{cases} \nu((x, \infty)) & \text{при } x \geq 0, \\ -\nu((-\infty, x]) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Если $\int_{\mathbb{R}} |x| |\nu|(dx) < \infty$, то $T\nu$ — конечная мера с преобразованием Лапласа $\widehat{T\nu}(s) = [\hat{\nu}(s) - \hat{\nu}(0)]/s$, $\operatorname{Re} s = 0$; значение $\widehat{T\nu}(0)$ определяется по непрерывности как $\int_{\mathbb{R}} x \nu(dx)$. Двойное применение оператора T там, где это возможно, будем обозначать через T^2 : $T^2\nu := T(T\nu)$.

Для произвольной меры ν обозначим через ν_c ее абсолютно непрерывную компоненту относительно меры Лебега, а через ν_s — ее сингулярную часть: $\nu_s := \nu - \nu_c$, т. е. $\nu_s = \nu_d + \nu_{\text{с}}$, где ν_d — дискретная компонента меры ν , а $\nu_{\text{с}}$ — ее сингулярная компонента в обычном смысле.

Для удобства изложения воспроизведем вариант теоремы 5.1 из [9] для распределений вероятностей с *отрицательным* средним в том объеме, в котором она здесь будет использоваться.

Теорема 4. Пусть $\varphi(x)$ — полумультипликативная функция, неубывающая на $[0, \infty)$ и равная тождественно единице на $(-\infty, 0)$, и пусть F — распределение вероятностей с конечным отрицательным средним $\mu = \int_{\mathbb{R}} x F(dx)$ такое,

что $F \in S(\varphi)$ и $(\widehat{F^{m*}})_s(r_{\pm}(\varphi)) < 1$ при некотором $m \geq 1$, причем $\widehat{F}(s) \neq 1$ при $s \neq 0$ и $0 = r_-(\varphi) \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)$. Предположим, что $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — измеримая по Борелю функция такая, что (a) $g \in L_1(\mathbb{R})$, (b) $g \cdot \varphi \in L_{\infty}(\mathbb{R})$, (c) $g(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ вне множества лебеговой меры нуль и (d) $\varphi(x) \int_x^{\infty} |g(y)| dy \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Допустим, что

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(x) \int_{-\infty}^x F((-\infty, y]) dy dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) \int_x^{\infty} F((y, \infty)) dy dx < \infty. \quad (18)$$

Тогда при x , стремящемся к ∞ вне множества лебеговой меры нуль, имеем

$$U * g(x) = o\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right).$$

Заметим, что если $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|\varphi(x) < \infty$ и $g(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при обычном стремлении $x \rightarrow \infty$, то заключение теоремы 4 справедливо при $x \rightarrow \infty$ без оговорок о стремлении x к ∞ вне множества лебеговой меры нуль. Такое же замечание относится и к следующим теоремам 5 и 6. Соотношение (18) означает, что $T^2 F \in S(\varphi)$.

Теорема 5. Пусть полумультипликативная функция $\varphi(x)$ и распределение вероятностей F удовлетворяют гипотезам теоремы 4. Предположим, что $f(x)$, $x > 0$, — измеримая по Борелю функция такая, что $f \in L_1(0, \infty)$, $f \cdot \varphi \in L_{\infty}(0, \infty)$, $f(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ вне множества лебеговой меры нуль и $\varphi(x) \int_x^{\infty} |f(y)| dy \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Допустим, что выполнено условие (18). Тогда

$$z(x) = o\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) \quad (19)$$

при $x \rightarrow \infty$ вне множества лебеговой меры нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы установили, что (см. формулу (16))

$$z(x) = U_+ * [(U_- * f)|_{(0, \infty)}](x).$$

Имеет место следующая эквивалентность:

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) F((x, \infty)) dx < \infty \iff \int_0^{\infty} \varphi(x) F_+(dx) < \infty \quad (20)$$

(см. [12; теорема 4 при $n = 1$]) или $TF \in S(\varphi) \iff F_+ \in S(\varphi)$. Так как $T^2F \in S(\varphi) \implies TF \in S(\varphi)$ (см. [9, п. 4]), в силу (20) справедливо следующее соотношение: $F_+ \in S(\varphi)$. Мера восстановления U_+ является обратным элементом для меры $\delta_0 - F_+$ в банаховой алгебре конечных мер: $U_+ * (\delta_0 - F_+) = \delta_0$. Покажем, что $U_+ = (\delta_0 - F_+)^{-1} \in S(\varphi)$. Из условия $\widehat{F}(s) \neq 1$ при $s \neq 0$ и $0 \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)$, равенства (9) и несобственности распределения F_+ вытекает, что $\widehat{F}_+(s) \neq 1$ при $0 \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)$, причем $\widehat{F}_+(r_\pm(\varphi)) < 1$. Преобразование Лапласа $\widehat{F}_+(s)$ — выпуклая функция. Следовательно, $\widehat{F}_+(\xi) < 1$ при $\xi \in [0, r_+(\varphi)]$. Пусть $\mathcal{M}$ — пространство максимальных идеалов алгебры $S(\varphi)$. Из теории банаховых алгебр (нормированных колец) известны следующие факты [13]. Каждый максимальный идеал $M \in \mathcal{M}$ порождает некоторый гомоморфизм $h : S(\varphi) \rightarrow \mathbb{C}$ и M — ядро этого гомоморфизма. Обозначим через $\nu(M)$ значение h на $\nu \in S(\varphi)$. Элемент $\nu \in S(\varphi)$ имеет обратный тогда и только тогда, когда ν не принадлежит никакому максимальному идеалу $M \in \mathcal{M}$. Иными словами, ν обратим тогда и только тогда, когда $\nu(M) \neq 0$ при любом $M \in \mathcal{M}$. По теореме о строении произвольного гомоморфизма $h : S(\varphi) \rightarrow \mathbb{C}$ (см. [14, теорема 1])

$$h(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, \nu) \exp(\alpha x) \nu(dx), \quad \nu \in S(\varphi),$$

где α — вещественное число такое, что $r_-(\varphi) \leq \alpha \leq r_+(\varphi)$, а функция $\chi(x, \nu)$ двух переменных $x \in \mathbb{R}$ и $\nu \in S(\varphi)$ — обобщенный характер, из свойств которого потребуются лишь следующее: $|\nu|$ -ess sup $|\chi(x, \nu)| \leq 1$. Имеем

$$|F_+(M)| = |h(F_+)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, \nu) \exp(\alpha x) F_+(dx) \right| \leq \widehat{F}_+(\alpha) < 1.$$

Следовательно, $|(\delta_0 - F_+)(M)| \geq 1 - \widehat{F}_+(\alpha) > 0$ при всех $M \in \mathcal{M}$. Обратимость элемента $\delta_0 - F_+ \in S(\varphi)$ доказана. Подчеркнем, что $U_+ = (\delta_0 - F_+)^{-1} \in S(\varphi)$.

Предположим временно, что распределение F_- удовлетворяет условиям теоремы 4 в качестве распределения F . Тогда по теореме 4 имеем

$$\beta(x) := |(U_- * f)|_{(0, \infty)}(x) \leq |U_- * f(x)| = o\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) \quad (21)$$

при $x \rightarrow \infty$ вне множества лебеговой меры нуль. Как уже отмечалось, если $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|\varphi(x) < \infty$ и $f(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при обычном стремлении $x \rightarrow \infty$, то соотношение (21) справедливо при $x \rightarrow \infty$ без оговорки о стремлении x к ∞ вне множества лебеговой меры нуль.

Пусть для простоты $f \geq 0$. Предположим сначала, что $f(x) \cdot \varphi(x)$ — ограниченная функция, т. е. $f(x) \cdot \varphi(x) \leq \|f \cdot \varphi\|_\infty$. Покажем, что в этом случае функция $\varphi(x) \cdot \beta(x)$ также ограничена. Выберем число $A > 0$ так, чтобы $\varphi(x) \int_x^\infty f(y) dy \leq 1$ при всех $x \geq A$. Тогда

$$\sup_{x \geq 0} \frac{\varphi(x)}{|\mu|} \int_x^\infty f(y) dy \leq \max \left\{ 1, \frac{\varphi(A) \|f\|_1}{|\mu|} \right\}.$$

Обозначим через L сужение меры Лебега на множество $(-\infty, 0]$. Воспользуемся теоремой 3.1 из [9], в которой положим $H := U_-$ и $\mathcal{A} := S(\varphi)$ и согласно которой справедливо разложение типа Стоуна $U_- = U_1 + U_2$. Оно также обладает свойствами, указанными в § 4, и, кроме того, $U_1 - L/|\mu| \in S(\varphi)$ и $U_2 \in S(\varphi)$ (см. [9, теорема 3.1]). При любом x имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) \cdot \beta(x) &\leq \varphi(x) U_- * f(x) \leq \left| \varphi(x) \left(U_1 - \frac{L}{|\mu|} \right) * f(x) \right| + \frac{\varphi(x) L * f(x)}{|\mu|} \\ &+ |\varphi(x) U_2 * f(x)| \leq \int_{-\infty}^0 f(x-y) \varphi(x-y) \varphi(y) \left| U_1 - \frac{L}{|\mu|} \right| (dy) \\ &+ \frac{\varphi(x)}{|\mu|} \int_x^\infty f(y) dy + \int_{-\infty}^0 f(x-y) \varphi(x-y) \varphi(y) |U_2|(dy) \\ &\leq \|f \cdot \varphi\|_\infty \left\| U_1 - \frac{L}{|\mu|} \right\|_\varphi + \max \left\{ 1, \frac{\varphi(A) \|f\|_1}{|\mu|} \right\} + \|f \cdot \varphi\|_\infty \|U_2\|_\varphi < \infty. \end{aligned}$$

Предположим, что $f(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при обычном стремлении $x \rightarrow \infty$. Тогда соотношение (21) выполняется при обычном стремлении $x \rightarrow \infty$; получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) |z(x)| &\leq \varphi(x) U_+ * \beta(x) = \varphi(x) \int_0^x \beta(x-y) U_+(dy) \\ &\leq \int_0^x \varphi(x-y) \beta(x-y) \varphi(y) U_+(dy) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x \rightarrow \infty$ по теореме о мажорируемой сходимости, так как $\varphi(y) U_+(dy)$ — конечная мера.

Пусть $f \cdot \varphi \in L_\infty(0, \infty)$, $f(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ вне множества лебеговой меры нуль. Возьмем функцию $\tilde{f} \in L_1(0, \infty)$ такую, что $\tilde{f} = f$ п.в., $\sup_{x \geq 0} \tilde{f}(x)\varphi(x) < \infty$ и $\tilde{f}(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ в обычном смысле. Для этого достаточно положить $\tilde{f}(x) = 0$ на множестве $\{x \in (0, \infty) : |f(x)| \cdot \varphi(x) > \|f \cdot \varphi\|_\infty\}$ и на множестве, скажем, B нулевой лебеговой меры таком, что $\lim_{x \notin B, x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \varphi(x) = 0$, в остальных точках полагаем $\tilde{f}(x) = f(x)$. Обозначим через $z_{\tilde{f}}(x)$ решение уравнения (1) с $\tilde{f}$ вместо f . По уже доказанному $z_{\tilde{f}}(x) = o(1/\varphi(x))$, $x \rightarrow \infty$. Теперь, чтобы прийти к заключению теоремы, достаточно показать, что $z(x) = z_{\tilde{f}}(x)$ п.в. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |z(x) - z_{\tilde{f}}(x)| dx &= \int_0^\infty |U_+ * [(U_- * f)|_{(0, \infty)}](x) - U_+ * [(U_- * \tilde{f})|_{(0, \infty)}](x)| dx \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |(U_- * f)|_{(0, \infty)}(x-y) - (U_- * \tilde{f})|_{(0, \infty)}(x-y)| U_+(dy) dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty |(U_- * f - U_- * \tilde{f})|_{(0, \infty)}(x-y)| U_+(dy) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |U_- * f(x-y) - U_- * \tilde{f}(x-y)| U_+(dy) dx \\
 &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 |f(x-y-u) - \tilde{f}(x-y-u)| U_-(du) U_+(dy) dx \\
 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty |f(x-y-u) - \tilde{f}(x-y-u)| dx U_-(du) U_+(dy) = 0.
 \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство получено двойным применением теоремы Фубини. Требуемое соотношение (19) установлено в полном объеме.

Осталось проверить, что распределение F_- удовлетворяет условиям теоремы 4 в качестве распределения F . Покажем, что $T^2 F_- \in S(\varphi)$. Так как $\varphi(x) \equiv 1$ на $(-\infty, 0]$, в этом случае

$$T^2 F_- \in S(\varphi) \iff \int_{-\infty}^0 x^2 F_-(dx) < \infty. \quad (22)$$

Рассматривая симметричный вариант теоремы 3 в [12] при $n = 1$, видим, что неравенство в правой части (22) эквивалентно неравенству $\int_{-\infty}^0 x^2 F(dx) < \infty$, которое вытекает из условия (18) теоремы, означающего, что $T^2 F \in S(\varphi)$:

$$T^2 F \in S(\varphi) \implies \int_{-\infty}^0 x^2 F(dx) < \infty,$$

так как $\varphi(x) \equiv 1$ на $(-\infty, 0]$. Итак, требуемое соотношение $T^2 F_- \in S(\varphi)$ установлено. Из равенства (9) вытекает, что $\widehat{F}_-(s) \neq 1$ при $0 \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)$ и $s \neq 0$. Осталось показать, что $(\widehat{F_-^{m*}})_s(r_\pm(\varphi)) < 1$ при некотором $m \geq 1$. Так как $\varphi(x) \equiv 1$ на $(-\infty, 0]$ и распределение F_- сосредоточено на $(-\infty, 0]$, справедливости неравенства

$$(\widehat{F_-^{m*}})_s(r_+(\varphi)) \leq (\widehat{F_-^{m*}})_s(0).$$

Согласно условию теоремы $(\widehat{F_-^{m*}})_s(0) < 1$ при некотором $m \geq 1$. По теореме 2 из [8] это влечет $(\widehat{F_-^{m*}})_s(0) < 1$ при некотором $m = m(F_-) \geq 1$. Таким образом, распределение F_- удовлетворяет условиям теоремы 4 в качестве распределения F . Теорема 5 доказана полностью.

§ 6. Асимптотика решения $z(x) + cM(x)$

Напомним, что $M(x) = P(\sup_{n \geq 0} S_n \leq x)$ — функция распределения супремума случайного блуждания $\{S_n\}$, уходящего в $-\infty$. Установим асимптотику решения $Z_c(x) := z(x) + cM(x)$ уравнения (1) (см. § 4). Непосредственно из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Тогда $Z_c(x) \rightarrow c$ при $x \rightarrow \infty$.*

В условиях теоремы 5 это решение также стремится к c при $x \rightarrow \infty$. Скорость сходимости такого решения можно оценить, воспользовавшись оценкой

для $z(x)$ в теореме 5 и оценками для «хвоста» $1 - M(x) = P(\sup_{n \geq 0} S_n > x)$ распределения супремума, которых немало имеется в литературе. Приведем один из возможных результатов о скорости сходимости решения $Z_c(x)$ к c при $x \rightarrow \infty$. Напомним, что в теореме 5 предыдущего параграфа $\varphi(x)$ обозначает полумультипликативную функцию, неубывающую на $[0, \infty)$.

Теорема 6. *Предположим, что выполнены условия теоремы 5. Тогда*

$$Z_c(x) - c = o\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

при $x \rightarrow \infty$ вне множества лебеговой меры нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось ранее, соотношение (18) означает, что $T^2 F \in S(\varphi)$, откуда вытекает $TF \in S(\varphi)$ (см. [9, п. 4]). Тогда по теореме 2 из [11]

$$E\varphi(\sup_{n \geq 0} S_n) = \int_0^\infty \varphi(x) dM(x) < \infty.$$

Следовательно,

$$\varphi(x)[1 - M(x)] \leq \int_x^\infty \varphi(y) dM(y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Применяя соотношения (19) и (23), имеем

$$|Z_c(x) - c| = |z(x) + cM(x) - c| \leq |z(x)| + |c|[1 - M(x)] = o\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

§ 7. Сопоставление результатов

В [3] рассматривалась задача

$$\begin{aligned} \psi(x) &= - \int_0^\infty \psi(y) dK(x-y) + f(x), \quad 0 \leq x < \infty; \\ \psi(x) &\leq c < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = c, \end{aligned}$$

где $\psi(x)$ — неизвестная функция, а функции $K(x)$ и $f(x)$ известны.

Пусть $K(x)$ — непрерывная функция распределения, а функция $f(x)$ ограничена, непрерывна и удовлетворяет условию $f(x) \leq c[1 - K(x)]$ на $[0, \infty)$. Тогда (см. [3, теорема 1]) для существования решения рассматриваемой задачи необходимо и достаточно существование функции $\psi^*(x)$ такой, что

$$\psi^*(x) + \int_0^\infty \psi^*(y) dK(x-y) \leq f(x), \quad \psi^*(x) \leq c, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi^*(x) = c.$$

Конкретный пример функции $\psi^*(x)$ с перечисленными свойствами приведен в лемме 1 из [3] при следующих дополнительных предположениях: существует число $L > 0$ такое, что

$$\int_{-\infty}^\infty e^{Lz} dK(z) \leq 1 \quad (24)$$

и, кроме того, $f(x) \geq 0$. При этом искомая функция $\psi^*(x)$ имеет вид $\psi^*(x) = 1 - e^{-Lx}$ и $c = 1$. Условие (24) влечет существование среднего

$$\nu := \int_{-\infty}^{\infty} z dK(z) \in [-\infty, 0).$$

Действительно, функция

$$\hat{K}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda z} dK(z), \quad \lambda \in [0, L],$$

строго выпукла, так как

$$\hat{K}''(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{\lambda z} dK(z) > 0, \quad \lambda \in (0, L)$$

(см. [15, гл. IV, § 2, п. 143]). Из неравенства (24) вытекает конечность интеграла $\int_0^{\infty} z dK(z)$, в то время как интеграл $\int_{-\infty}^0 z dK(z)$ может принимать значение $-\infty$. В любом случае, среднее ν определено и принадлежит $[-\infty, \infty)$. Из неравенства (24) и свойства строгой выпуклости функции $\hat{K}(\lambda)$ вытекает неравенство $\hat{K}(\lambda) < 1$ при всех $\lambda \in (0, L)$. Это неравенство, очевидно, нарушалось бы, если бы $\nu > 0$. Но и при $\nu = 0$ оно также не имело бы места, так как по формуле Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа (см. [15, гл. III, § 5, п. 127]) мы бы имели

$$\hat{K}(\lambda) = 1 + \frac{\hat{K}''(\xi)\lambda^2}{2!} > 1,$$

где $\xi \in (0, \lambda)$, что приводит к противоречию. Таким образом, функция распределения $K(x)$ порождает случайное блуждание, уходящее в $-\infty$. В обозначениях настоящей статьи роль $K(x)$ играет распределение F (точнее, $K(x) := F((-\infty, x])$). Дадим оценку скорости сходимости решения $Z_c(x) = z(x) + cM(x)$ к пределу c , несколько модифицируя при этом условия работы [3]. Обозначим порождаемую функцией распределения $K(z)$ положительную меру той же самой буквой K .

Следствие 2. Допустим, что выполнено неравенство (24) и $\nu \in (-\infty, 0)$. Предположим, что m -кратная свертка K^{m*} при некотором $m \geq 1$ содержит ненулевую абсолютно непрерывную компоненту. Пусть $|f(x)| \leq C[1 - K(x)]$, где $C \in (0, \infty)$ — константа. Тогда для любого $L' < L$ верна асимптотическая формула

$$Z_c(x) - c = o(e^{-L'x}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Доказательство. Ввиду строгой выпуклости преобразования Лапласа положительной меры имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{L'z} dK(z) < 1. \quad (26)$$

Возьмем $\exp(L'x)$ в качестве полумультимпликативной функции $\varphi(x)$ в теореме 5. Очевидно, что $\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{L'z} dK(z) < \infty$ и по теореме 3 из [16] $T^2 K \in S(\varphi)$. Оставшиеся условия теоремы 5 проверяются элементарно. Например,

$$\varphi(x)|f(x)| \leq e^{L'x} C[1 - K(x)] \leq C e^{(L'-L)x} \int_x^{\infty} e^{Ly} dK(y),$$

откуда $f \cdot \varphi \in L_{\infty}(0, \infty)$ и $f(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Далее,

$$\begin{aligned} e^{L'x} \int_x^{\infty} |f(y)| dy &\leq e^{L'x} C \int_x^{\infty} [1 - K(y)] dy \leq e^{L'x} C \int_x^{\infty} e^{-Ly} \int_y^{\infty} e^{Lz} dK(z) dy \\ &\leq c' e^{L'x} \int_x^{\infty} e^{-Ly} dy = \frac{c' e^{(L'-L)x}}{L} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

здесь $c' = C \sup_{y \geq 0} \int_y^{\infty} e^{Lz} dK(z)$. Из неравенства (26) вытекает, что $\hat{K}(s) \neq 1$ при $s \neq 0$ и $0 \leq \operatorname{Re} s \leq L'$. Применяя теорему 6, убеждаемся в справедливости соотношения (25). Следствие 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В отличие от работы [3] в следствии 2 мы не предполагаем непрерывности функций $f(x)$ и $K(x)$, хотя требуем наличия абсолютно непрерывной компоненты у K^{m*} при некотором $m \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Lz} dK(z) < 1 \quad (27)$$

заключение следствия 2 можно улучшить, если дополнительно предположить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{Lz} dK(z) < \infty. \quad (28)$$

Тогда в формуле (25) выражение $o(e^{-L'x})$ при $x \rightarrow \infty$ можно заменить выражением $o(e^{-Lx})$ при $x \rightarrow \infty$. Действительно, возьмем $\exp(Lx)$ в качестве полумультимпликативной функции $\varphi(x)$ в теореме 5. Из условия (28) вытекает соотношение $T^2 K \in S(\varphi)$ (см. [16, теорема 3]). Проверим остальные условия теоремы 5. Имеем

$$\varphi(x)|f(x)| \leq e^{Lx} C[1 - K(x)] \leq C e^{Lx} \int_x^{\infty} \frac{y^2 e^{Ly}}{x^2 e^{Lx}} dK(y) = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

откуда следует, что $f \cdot \varphi \in L_{\infty}(0, \infty)$ и $f(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Далее, при $x \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} e^{Lx} \int_x^{\infty} |f(y)| dy &\leq e^{Lx} C \int_x^{\infty} [1 - K(y)] dy \leq e^{Lx} C \int_x^{\infty} \int_y^{\infty} \frac{u^2 e^{Lu}}{y^2 e^{Ly}} dK(u) dy \\ &\leq C \int_x^{\infty} \frac{1}{y^2} \int_y^{\infty} u^2 e^{Lu} dK(u) dy = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т. е. заведомо $e^{Lx} \int_x^\infty |f(y)| dy \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Из неравенства (27) вытекает, что $\hat{K}(s) \neq 1$ при $s \neq 0$ и $0 \leq \operatorname{Re} s \leq L$. Применяя теорему 6, убеждаемся в справедливости соотношения

$$Z_c(x) - c = o(e^{-Lx}), \quad x \rightarrow \infty,$$

что и требовалось установить.

Автор благодарит рецензента, внимательно прочитавшего рукопись и сделавшего полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 2.
2. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
3. Норкин В. И. О решении уравнения Винера — Хопфа с вероятностным ядром // Кибернетика и системный анализ. 2006. Т. 42, № 2. С. 39–47.
4. Дмитриев В. И. Винера — Хопфа уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1977. Т. 1. С. 967–968.
5. Stone C. On absolutely continuous components and renewal theory // Ann. Math. Stat. 1966. V. 37. P. 271–275.
6. Alsmeyer G. Erneuerungstheorie. Stuttgart: B. G. Teubner, 1991.
7. Arjas E., Nummelin E., Tweedie R. L. Uniform limit theorems for non-singular renewal and Markov renewal processes // J. Appl. Probab. 1978. V. 15. P. 112–125.
8. Sgibnev M. S. Equivalence of two conditions on singular components // Stat. Probab. Lett. 1998. V. 40. P. 127–131.
9. Sgibnev M. S. Stone's decomposition of the renewal measure via Banach-algebraic techniques // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. P. 2425–2430.
10. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
11. Sgibnev M. S. Submultiplicative moments of the supremum of a random walk with negative drift // Stat. Probab. Lett. 1997. V. 32. P. 377–383.
12. Сгибнев М. С. Полумультипликативные моменты сомножителей матричной факторизации Винера — Хопфа // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 2. С. 115–130.
13. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
14. Рогозин Б. А., Сгибнев М. С. Банаховы алгебры мер на прямой // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 2. С. 160–169.
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. I.
16. Sgibnev M. S. An asymptotic expansion for the distribution of the supremum of a random walk // Studia Math. 2000. V. 140. P. 41–55.

Статья поступила 22 марта 2016 г.

Сгибнев Михаил Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sgibnev@math.nsc.ru